

УДК 519.7

Сравнение эквивалентностей непрерывно-временных сетей Петри относительно стратегий сброса часов

Зубарев А.Ю. (Институт систем информатики СО РАН)

Непрерывно-временные сети Петри (НВСП) — расширение сетей Петри, где каждый переход имеет собственные часы и временной интервал. Данная модель рассматривается в контексте слабой временной стратегии, в которой ход времени не заставляет переходы срабатывать. Для НВСП исследуются эквивалентности в дихотомиях «интерливинг — истинный параллелизм» и «линейное — ветвящееся время». Анализируются взаимосвязи между эквивалентностями относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегий, определяющих порядок сброса часов переходов.

Ключевые слова: непрерывно-временные сети Петри, слабая временная стратегия, промежуточная и устойчиво атомарная стратегии сброса часов, поведенческие эквивалентности, семантика интерливинга, процессно-сетевая семантика, языковая и бисимуляционная эквивалентности, бисимуляционная эквивалентность с сохранением истории

1. Введение

Безопасность функционирования современных информационно-компьютерных систем, ошибки в которых могут привести к большим убыткам или создать угрозу для жизни людей, имеет критическое значение. Эквивалентности помогают сравнивать поведение данных систем с точки зрения различных аспектов их работы, что играет важную роль в спецификации и верификации. При определении эквивалентностей моделей параллельных и распределенных систем принято рассматривать две дихотомии: «интерливинг — истинный параллелизм» и «линейное — ветвящееся время». Критерием первой дихотомии является степень учета частичного порядка между действиями системы, второй — степень учета точек недетерминированного выбора альтернативных действий моделируемой системы.

Сети Петри (СП) являются хорошо изученной моделью для анализа параллельных и распределенных систем. События и условия системы в данной модели наглядно представлены в виде *переходов* (барьеров) и *мест* (окружностей), образующих вершины двудоль-

ного направленного графа. Состояние СП определяется *разметкой* — множеством мест с *фишками*, которые обозначаются жирными точками в соответствующих окружностях. *Допустимый переход*, т.е. переход, имеющий фишки в каждом входном месте, может сработать и тем самым изменить разметку. Новая разметка получается в результате удаления фишек из входных мест перехода и добавления фишек в его выходные места.

Для учета непрерывно-временных (количественных) параметров системы были предложены различные временные расширения СП. В литературе представлены два типа подходов: дискретно-временные сети Петри (ДВСП) и непрерывно-временные сети Петри (НВСП). В ДВСП используются глобальные часы, и каждому переходу присваивается целочисленное значение, определяющее продолжительность его срабатывания. В то время как в НВСП каждый переход имеет собственные часы и временной интервал действительных чисел. Известно, что НВСП обладают той же вычислительной мощностью, что и машины Тьюринга, и включают в себя ДВСП, благодаря чему модели НВСП вызывают особый интерес у исследователей. Состояние НВСП описывается разметкой и вектором показаний часов допустимых переходов. Допустимый переход может сработать, если значение его часов принадлежит связанному с ним интервалу. Срабатывание перехода не занимает время, поэтому рассматривают два способа изменения состояний: *ход времени* (увеличение значений часов допустимых переходов) и *срабатывание перехода* (смена разметки и сброс часов некоторых переходов). В работе рассматривается слабая временная стратегия НВСП. Данная стратегия не ограничивает увеличение значений часов переходов. Таким образом, часы допустимого перехода могут пересечь верхнюю границу его временного интервала, что недопустимо в сильной стратегии. Было доказано, что НВСП со слабой временной стратегией (НВСП_{сл}) и НВСП с сильной временной стратегией не сравнимы по выразительной мощности [7].

После срабатывания перехода часы некоторых переходов сбрасываются, т.е. переустанавливаются в ноль. Порядок данного сброса определяется стратегией сброса часов. В литературе используются два подхода к сбросу часов: промежуточный и устойчиво атомарный. В промежуточной стратегии учитывается разметка, которая получается после удаления старых фишек и до добавления новых. Часы допустимого в новой разметке перехода сбрасываются, если он не был допустимым в промежуточной разметке. В устойчиво атомарной стратегии часы допустимого в новой разметке перехода сбрасываются только в том случае, если переход не был допустимым в старой разметке (до удаления фишек),

т.е. промежуточная разметка не учитывается. Известно, что для НВСП_{сл} промежуточная стратегия не является более выразительной, чем устойчиво атомарная [8]. Кроме того, существуют системы, где при моделировании использовать устойчиво атомарную стратегию предпочтительнее. С другой стороны, в промежуточной стратегии проблемы достижимости и ограниченности являются разрешимыми, в отличие от устойчиво атомарной стратегии [6, 8].

Определение эквивалентностей и изучение их взаимосвязей для моделей параллельных и распределенных систем является важной задачей, которой посвящено большое число работ. В работе [3] было проведено систематическое исследование эквивалентностей для «невременных» СП; исследованы невременные и временные эквивалентности ДВСП. Для НВСП с сильной временной стратегией и промежуточной стратегией сброса часов в работе [4] была предложена «истинно параллельная» семантическая модель. На основе данной модели в работе [9] были разработаны эквивалентности и построена их иерархия.

Поскольку предложенный в [4] метод построения «истинно параллельной» семантики не может быть использован для НВСП_{сл}, то в [10] нами была предложена конструкция временных процессов, где время связано с состояниями системы. Используя полученную семантическую модель, в [2] для НВСП_{сл} с устойчиво атомарной стратегией сброса часов были разработаны и изучены эквивалентности, построена их иерархия. Данная работа продолжает исследования [2, 10], посвященные семантическим моделям и эквивалентностям НВСП_{сл}, ее целью является исследование эквивалентностей относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегии сброса часов. Исходя из поставленной цели, в этой статье были решены следующие задачи: обобщение конструкций эквивалентностей работы [2] для промежуточной стратегии; изучение условий для совпадения данных эквивалентностей относительно разных стратегий сброса часов; исследование влияния выбора стратегии сброса часов на эквивалентность НВСП_{сл}.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы познакомимся с НВСП_{сл}, промежуточной и устойчиво атомарной стратегиями сброса часов переходов. В разделе 3 изучим временные процессы, состоящие из ациклической конструкции временных причинно-следственных сетей и гомоморфизма в НВСП_{сл}. На основе данной конструкции в разделе 4 мы рассмотрим языковые и бисимуляционные эквивалентности для дихотомии «интерливинг — истинный параллелизм». В разделе 5 мы исследуем взаимосвязи рассмотренных эквивалентностей относительно стратегий сброса часов. В заключительном разделе 6 бу-

дуг рассмотрены полученные результаты и описаны планы дальнейшей работы.

2. Непрерывно-временные сети Петри

Рассмотрим определение модели сетей Петри с временными интервалами, представляющими временные задержки срабатываний переходов. Сначала напомним синтаксис и семантику «невременных» сетей Петри.

Определение 1. (Помеченная на множестве действий Act) сеть Петри ($СП$) — это набор $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$, где P — конечное множество мест и T — конечное множество переходов такие, что $P \cap T = \emptyset$ и $P \cup T \neq \emptyset$; $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — отношение инцидентности; $\emptyset \neq M_0 \subseteq P$ — начальная разметка; $L : T \rightarrow Act$ — помечающая функция. Для элемента $x \in P \cup T$ определим множество $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$ входных и множество $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$ выходных элементов, которые для подмножества элементов $X \subseteq P \cup T$ обобщаются соответственно до множеств $\bullet X = \bigcup_{x \in X} \bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$.

Разметка M СП \mathcal{N} — это любое подмножество множества P . Переход $t \in T$ является допустимым в разметке M , если $\bullet t \subseteq M$. Обозначим через $En(M)$ множество всех переходов, допустимых в разметке M . Срабатывание перехода, допустимого в разметке M , приводит к новой разметке $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$ (обозначается $M \xrightarrow{t} M'$). Разметка M является достижимой в \mathcal{N} , если существует последовательность переходов $t_1 \dots t_n$ для $n \geq 0$ такая, что $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \dots M_{n-1} \xrightarrow{t_n} M_n = M$. СП \mathcal{N} называется бесконтактной, если для любой достижимой в \mathcal{N} разметки M и любого перехода t , допустимого в M , верно, что $(M \setminus \bullet t) \cap t^\bullet = \emptyset$.

В работе рассматриваются безопасные сети Петри, т.е. при последовательном срабатывании переходов из начальной разметки сети каждое ее место будет иметь не более одной фишки. Это следствие определенного ранее свойства бесконтактности и того, что начальная маркировка — (обычное) множество.

Непрерывно-временная сеть Петри со слабой временной стратегией состоит из базовой сети Петри и статической временной функции, отображающей каждый переход во временной интервал. Подразумевается, что у каждого перехода есть собственные локальные часы, которые отсчитывают ход времени с момента, когда переход стал допустимым. Пусть $Interv = \{[a, b], [a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}), a \leq b\}$ — множество интервалов с границами из множества рациональных чисел.

Определение 2. (Помеченная на Act) непрерывно-временная сеть Петри со слабой временной стратегией ($НВСП_{сл}$) — это пара $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$, где $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$ — базовая (помеченная на Act) сеть Петри и $D : T \rightarrow Interv$ — статическая временная функция, сопоставляющая каждому переходу из T временной интервал из $Interv$.

Состояние $НВСП_{сл}$ \mathcal{TN} — это пара $S = (M, I)$ такая, что M — разметка и $I : En(M) \rightarrow \mathbb{R}$ — динамическая временная функция. Переход $t \in En(M)$ может сработать в состоянии S , если $I(t) \in D(t)$. Обозначим через $Fi(S)$ множество всех переходов из $En(M)$, которые могут сработать в состоянии S . Для $НВСП_{сл}$ возможны два способа изменения состояния S : ход времени и действие в результате срабатывания перехода.

- Ход времени $\theta \in \mathbb{R}$ приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{\theta} S'$), где $M' = M$ и $I'(t) = I(t) + \tau$ для всех $t \in En(M')$.
- Срабатывание перехода $t \in Fi(S)$ (действие $L(t)$) приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{t \dagger} S'$ или $S \xrightarrow{L(t) \dagger} S'$) такому, что:

$$- M' = (M \setminus \bullet t) \cup t \bullet;$$

$$- \forall t' \in En(M') : I'(t') = \begin{cases} 0, & \text{если } \uparrow enabled_{\dagger}(t', M, t), \\ I(t'), & \text{иначе;} \end{cases}$$

где $\dagger \in \{I, A\}$ определяет стратегию сброса часов, а предикат $\uparrow enabled_{\dagger}(t', M, t)$ указывает на необходимость сброса часов для перехода t' .

I: В случае промежуточной стратегии производится сброс часов перехода, который не являлся допустимым в промежуточной разметке $M \setminus \bullet t$ и стал допустимым в разметке M' (после срабатывания перехода t):

$$\uparrow enabled_I(t', M, t) = t' \notin En(M \setminus \bullet t) \wedge t' \in En(M').$$

A: В случае устойчиво атомарной стратегии производится сброс часов перехода, который не являлся допустимым в разметке M (до срабатывания перехода t) и стал допустимым в разметке M' :

$$\uparrow enabled_A(t', M, t) = t' \notin En(M) \wedge t' \in En(M').$$

Начальное состояние \mathcal{TN} — пара $S_0 = (M_0, I_0)$, где M_0 — начальная разметка и $I_0(t) = 0$ для всех $t \in En(M_0)$.

Если $\sigma = \theta_0 t_1 \theta_1 \dots t_n \theta_n$ для $n \geq 0$ — последовательность временных значений $\theta_i \in \mathbb{R}$ ($0 \leq i \leq n$) и срабатываний переходов $t_j \in T$ ($0 < j \leq n$) таких, что $S^0 \xrightarrow{\theta_0} \tilde{S}^0 \xrightarrow{t_1 \dagger}$

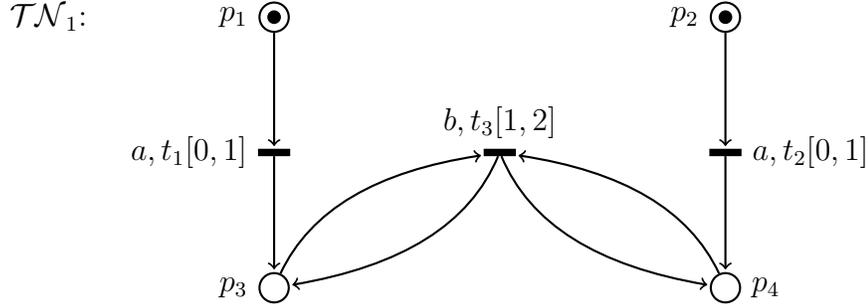
$S^1 \xrightarrow{\theta_1} \tilde{S}^1 \dots \tilde{S}^{n-1} \xrightarrow{t_n} S^n \xrightarrow{\theta_n} \tilde{S}^n$, то σ – пробег \mathcal{TN} из состояния S^0 (в состояние \tilde{S}^n) относительно стратегии сброса часов \dagger (обозначается $S^0 \xrightarrow{\sigma} \dagger \tilde{S}^n$).

Пусть \mathcal{TN} – НВСП_{сл} и $\dagger \in \{I, A\}$. Обозначим через $\mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN}, S)$ множество всех пробегов НВСП_{сл} \mathcal{TN} из состояния S относительно стратегии сброса часов \dagger и $\mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN}) = \mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN}, S_0)$. Состояние S будем называть *достижимым* в \mathcal{TN} относительно стратегии сброса часов \dagger (обозначается $S \in \mathcal{RS}_{\dagger}(\mathcal{TN})$), если существует пробег из $\mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN})$ в данное состояние. НВСП_{сл} \mathcal{TN} называется *бесконтактной*, если базовая сеть является бесконтактной. Кроме того, НВСП_{сл} является *T-закрытой*, если $\bullet t \neq \emptyset$ и $t \bullet \neq \emptyset$ для всех переходов сети. В дальнейшем будем рассматривать только бесконтактные и T-закрытые НВСП_{сл}.

Результаты, представленные в работе [11], показывают, что для любого пробег из $\mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN})$ существует аналогичный пробег с той же последовательностью срабатываний переходов, в котором используются только целочисленные временные значения. Данный факт позволяет далее рассматривать ход времени в виде целых чисел.

Пример 1. Рассмотрим НВСП_{сл} \mathcal{TN}_1 , представленную на рисунке 1. На графике места сети изображены окружностями ($\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$), переходы изображены барьерами ($\{t_1, t_2, t_3\}$), отношение инцидентности представлено направленными дугами, рядом с элементами указаны их имена. Каждому переходу ставится в соответствие временной интервал из $Interv$ и действие из $Act = \{a, b\}$. Начальной разметке ($\{p_1, p_2\}$) соответствует множество мест с фишками (жирными точками). Покажем, что последовательность $\sigma = 0 \ t_1 \ 1 \ t_2 \ 2 \ t_3 \ 3$ является пробегом НВСП_{сл} \mathcal{TN}_1 из начального состояния относительно промежуточной стратегии сброса часов (I), т.е. $\sigma \in \mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN}_1)$.

- Исходно сеть находится в состоянии $S_0 = (M_0, I_0)$, где $M_0 = \{p_1, p_2\}$ – начальная разметка, $En(M_0) = \{t_1, t_2\}$ – множество допустимых переходов в данной разметке и $I_0(t) = 0$ для каждого перехода t из $En(M_0)$. Ход времени 0 не изменит состояние, т.е. $\tilde{S}_0 = (\tilde{M}_0, \tilde{I}_0) = S_0$,
- Поскольку переход $t_1 \in En(\tilde{M}_0)$ и $\tilde{I}_0(t_1) = 0 \in D(t_1) = [0, 1]$, то t_1 может сработать в состоянии \tilde{S}_0 . Срабатывание перехода t_1 из \tilde{S}_0 приведет к новому состоянию $S_1 = (M_1, I_1)$ ($\tilde{S}_0 \xrightarrow{t_1} S_1$), где $M_1 = (\tilde{M}_0 \setminus \bullet t_1) \cup t_1 \bullet = \{p_3, p_2\}$, $En(M_1) = \{t_2\}$ и $I_1(t_2) = 0$. Ход времени 1 из состояния S_1 приведет к состоянию $\tilde{S}_1 = (\tilde{M}_1, \tilde{I}_1) = (M_1, \tilde{I}_1)$ с $\tilde{I}_1(t_2) = 1$.
- Переход t_2 является допустимым в разметке \tilde{M}_1 и $\tilde{I}_1(t_2) = 1 \in D(t_2) = [0, 1]$,

Рис. 1: Непрерывно-временная сеть Петри \mathcal{TN}_1

т.е. t_2 может сработать в состоянии \tilde{S}_1 . Срабатывание t_2 из \tilde{S}_1 приведет к новому состоянию $S_2 = (M_2, I_2)$ ($\tilde{S}_1 \xrightarrow{t_2}_I S_2$), где $M_2 = (\tilde{M}_1 \setminus \bullet t_2) \cup t_2 \bullet = \{p_3, p_4\}$, $En(M_2) = \{t_3\}$ и $I_2(t_3) = 0$, поскольку переход t_3 не является допустимым в промежуточной разметке $\tilde{M}_1 \setminus \bullet t_2$. Ход времени 2 из состояния S_2 приведет к состоянию $\tilde{S}_2 = (\tilde{M}_2, \tilde{I}_2) = (M_2, \tilde{I}_2)$ с $\tilde{I}_2(t_3) = I_2(t_3) + 2 = 2$.

– Допустимый переход $t_3 \in En(\tilde{M}_2) = \{t_3\}$ готов сработать из \tilde{S}_2 , поскольку $\tilde{I}_2(t_3) = 2 \in D(t_3) = [1, 2]$. Следовательно, $\tilde{S}_2 \xrightarrow{t_3}_I S_3 = (M_3, I_3)$, где $M_3 = (\tilde{M}_2 \setminus \bullet t_3) \cup t_3 \bullet = \{p_3, p_4\}$, $En(M_3) = \{t_3\}$ и $I_3(t_3) = 0$, так как переход t_3 не был допустимым в промежуточной разметке $\tilde{M}_2 \setminus \bullet t_3$. Заметим, что в случае устойчиво атомарной стратегии не было бы сброса локальных часов перехода t_3 . Далее, $S_3 \xrightarrow{3} \tilde{S}_3$ увеличит значение часов перехода t_3 , т.е. $\tilde{S}_3 = (\tilde{M}_3, \tilde{I}_3) = (M_3, \tilde{I}_3)$, где $\tilde{I}_3(t_3) = 3$. Заметим, что такой ход времени был бы невозможен в случае сильной временной стратегии, поскольку значение времени на часах перехода t_3 превысило верхнюю границу его временного интервала $D(t_3) = [1, 2]$.

Значит, $S_0 \xrightarrow{0} \tilde{S}_0 \xrightarrow{t_1}_I S_1 \xrightarrow{1} \tilde{S}_1 \xrightarrow{t_2}_I S_2 \xrightarrow{2} \tilde{S}_2 \xrightarrow{t_3}_I S_3 \xrightarrow{3} \tilde{S}_3 \in \mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN}_1)$.

3. Временные процессы

Данный раздел представляет предложенную в [10] модель временных причинно-следственных процессов, используемую для описания поведения НВСП_{сл}. Сначала определим ациклическую причинно-следственную сеть (ПСС), состоящую из двух разных множеств — событий и условий, связанных отношением инцидентности. Каждое условие ПСС должно иметь не более одного входного и не более одного выходного условия. Кроме того, каждое событие ПСС должно иметь как входное, так и выходное условие.

Определение 3. (Помеченная на Act) причинно-следственная сеть (ПСС) — это ациклическая сеть $N = (B, E, G, l)$, где B — конечное множество условий и E — конечное множество событий такие, что $B \cap E = \emptyset$; $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ — отношение инцидентности такое, что $|b^\bullet| \leq 1$, $|\bullet b| \leq 1$ для всех $b \in B$ и $E = \bullet B = B^\bullet$; $l : E \rightarrow Act$ — помечающая функция.

Для ПСС $N = (B, E, G, l)$ введем дополнительные понятия и обозначения:

- $x \prec x' \iff x G^+ x'$ и $x \preceq x' \iff x G^* x'$, где $x, x' \in B \cup E$, — отношение причинной зависимости на элементах ПСС N .
- $x \smile x' \iff \neg(x \preceq x') \wedge \neg(x' \preceq x)$, где $x, x' \in B \cup E$, — отношение параллелизма на элементах ПСС N .
- \smile -множество ПСС N — непустое подмножество условий $B' \subseteq B$ такое, что $b \smile b'$ для всех $b \neq b' \in B'$.
- Сечение C ПСС N — максимальное по включению \smile -множество.
- $\mathcal{CUT}(N)$ — множество всех сечений в ПСС N .
- $\bullet N = \{b \in B \mid \bullet b = \emptyset\}$ — начальное сечение ПСС N .
- $N^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$ — конечное сечение ПСС N .

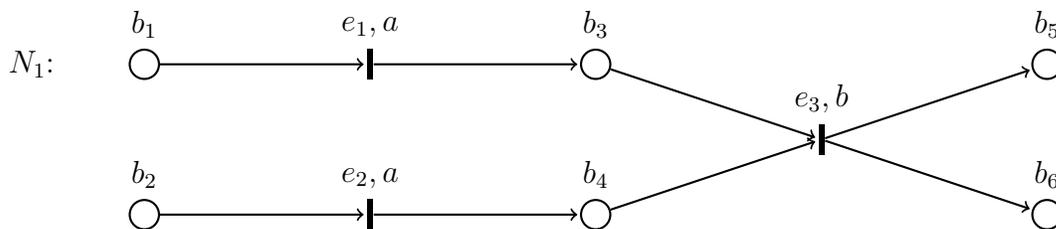
Неформально говоря, сечение — это «разметка» ПСС. Событие $e \in E$ допустимо в сечении $C \in \mathcal{CUT}(N)$ (обозначается $e \in En(C)$), если $\bullet e \subseteq C$. В этом случае будем писать $C \xrightarrow{e} C'$ или $C \longrightarrow C'$, где $C' = (C \setminus \bullet e) \cup e^\bullet$. На основе отношения (\longrightarrow) определяются отношения причинной зависимости и параллелизма на сечениях ПСС:

- $C \prec C' \iff C \rightarrow^+ C'$ и $C \preceq C' \iff C \rightarrow^* C'$, где $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$, — отношение причинной зависимости на сечениях ПСС.
- $C \smile C' \iff \neg(C \preceq C') \wedge \neg(C' \preceq C)$, где $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$, — отношение параллелизма на сечениях ПСС.

Для сечения $C \in \mathcal{CUT}(N)$ обозначим:

- $Cut(C) = \{C' \in \mathcal{CUT}(N) \mid C \smile C'\}$ — множество сечений ПСС N , параллельных сечению C .
- $\downarrow C = \{e \in E \mid e \preceq e', e' \in \bullet C\}$ — множество событий ПСС N , предшествующих сечению C .

Описываемое сечением состояние достигается после того, как предшествующие сечению события произошли. Как следствие, $C \preceq C' \iff \downarrow C \subseteq \downarrow C'$. Отметим, что $\downarrow \bullet N = \emptyset$ и $\downarrow N^\bullet = E$, где E — множество всех событий ПСС N .

Рис. 2: Причинно-следственная сеть N_1

Пример 2. Рассмотрим изображенную на рисунке 2 сеть $N_1 = (B, E, G, l)$, где $B = \{b_1, \dots, b_6\}$ — множество условий, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ — множество событий, $G = \{(b_1, e_1), (b_2, e_2), (e_1, b_3), (e_2, b_4), (b_3, e_3), (b_4, e_3), (e_3, b_5), (e_3, b_6)\}$ — отношение инцидентности и $l : E \rightarrow \{a, b\}$ — помечающая функция такая, что $l(e_1) = l(e_2) = a$ и $l(e_3) = b$. Видно, что $|\bullet b| \leq 1$ и $|b\bullet| \leq 1$ для всех $b \in B$. Кроме того, $E = \bullet B = B\bullet$. Значит, N_1 — помеченная на $Act = \{a, b\}$ ПСС.

Поскольку $b_1 \smile b_2$, т.е. $\neg(b_1 \preceq b_2) \wedge \neg(b_2 \preceq b_1)$, то $\{b_1, b_2\}$ — \smile -множество. Видно, что не существует $b \in B$ такого, что $b \smile b_1$ и $b \smile b_2$ одновременно. Значит, $\{b_1, b_2\}$ — максимальное по включению \smile -множество, т.е. сечение. Аналогично можно показать, что $\{b_1, b_4\}$, $\{b_2, b_3\}$, $\{b_3, b_4\}$, $\{b_5, b_6\}$ также являются сечениями. Сечение $\{b_1, b_2\}$ ($\{b_5, b_6\}$) с условиями без входных (выходных) событий — начальное (конечное) сечение ПСС N_1 . Из $\bullet e_1 \subseteq \{b_1, b_2\}$, $(\{b_1, b_2\} \setminus \bullet e_1) \cup e_1\bullet = \{b_2, b_3\}$ следует, что $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_2, b_3\}$ и $\{b_1, b_2\} \preceq \{b_2, b_3\}$. С другой стороны, $\{b_1, b_4\} \smile \{b_2, b_3\}$, так как $(\downarrow\{b_1, b_4\} = \{e_2\}) \not\subseteq (\downarrow\{b_2, b_3\} = \{e_1\})$ и $\downarrow\{b_2, b_3\} \not\subseteq \downarrow\{b_1, b_4\}$, т.е. $\neg(\{b_1, b_4\} \preceq \{b_2, b_3\})$ и $\neg(\{b_2, b_3\} \preceq \{b_1, b_4\})$.

Для определения связи между ПСС и СП используется гомоморфизм — отображение, сохраняющее отношение инцидентности и помечающую функцию.

Определение 4. Пусть $N = (B, E, G, l)$ — ПСС, $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$ — СП и $M \subseteq P$ — разметка \mathcal{N} . Гомоморфизмом из N в \mathcal{N} относительно разметки M называется отображение $\varphi : (B \cup E) \rightarrow (P \cup T)$, для которого выполняется:

- $\varphi(B) \subseteq P$ и $\varphi(E) \subseteq T$;
- сужение φ на подмножество $\bullet e$ — биекция между $\bullet e$ и $\bullet\varphi(e)$ для всех $e \in E$;
- сужение φ на подмножество $e\bullet$ — биекция между $e\bullet$ и $\varphi(e)\bullet$ для всех $e \in E$;
- сужение φ на подмножество $\bullet N$ — биекция между $\bullet N$ и M ;
- $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$.

Пример 3. Рассмотрим базовую СП $\mathcal{N}_1 = (P, T, F, M_0, L)$ НВСП_{с.л.} \mathcal{TN}_1 , изображенную на рисунке 1, ПСС $N_1 = (B, E, G, l)$, изображенную на рисунке 2, и функцию $\varphi : (B \cup E) \rightarrow (P \cup T)$, связывающую условия и события ПСС N_1 соответственно с местами и переходами СП \mathcal{N}_1 так, что $\varphi(b_1) = p_1$, $\varphi(b_2) = p_2$, $\varphi(b_3) = \varphi(b_5) = p_3$, $\varphi(b_4) = \varphi(b_6) = p_4$ и $\varphi(e_i) = t_i$ для $1 \leq i \leq 3$. Легко проверить, что сужение φ на подмножество $\bullet e$ (e^\bullet) является биекцией между данным подмножеством и $\bullet\varphi(e)$ ($\varphi(e)^\bullet$) для всех $e \in E$. Например, для события e_3 множество входных условий $\{b_3, b_4\}$ биективно отображается на множество входных мест $\{p_3, p_4\}$ перехода $\varphi(e_3) = t_3$, а множество выходных условий $\{b_5, b_6\}$ — на то же множество $\{p_3, p_4\}$ выходных мест t_3 . Видно, что сужение φ на подмножество $\bullet N_1 = \{b_1, b_2\}$ является биекцией между данным подмножеством и начальной разметкой $M_0 = \{p_1, p_2\}$. Кроме того, $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$. Следовательно, φ — гомоморфизм из N_1 в \mathcal{N}_1 относительно начальной разметки M_0 .

Определим временное расширение ПСС, где сечениям ставится в соответствие временное значение (длительность соответствующего состояния) либо указывается, что сечение (состояние) недостижимо по времени.

Определение 5. (Помеченная на Act) временная ПСС (ВПСС) — это пара $TN = (N, \tau)$, где N — (помеченная на Act) ПСС и $\tau : \mathcal{CUT}(N) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ — временная функция такая, что для каждого сечения $C \in \mathcal{CUT}(N)$ выполняется:

$$\tau(C) = \perp \iff \exists C' \in \mathcal{CUT}(N) : \tau(C') > 0.$$

Пусть $\mathcal{RC}(TN) = \{C \in \mathcal{CUT}(N) \mid \tau(C) \in \mathbb{N}\}$ — множество всех временных сечений.

Рассмотрим ВПСС $TN = (N, \tau)$, где $N = (B, E, G, l)$. Событие $e \in E$ может произойти в $C \in \mathcal{RC}(TN)$ (обозначается $e \in Fi(C)$), если $e \in En(C)$ и $C' = (C \setminus \bullet e) \cup e^\bullet \in \mathcal{RC}(TN)$. В этом случае будем писать $C \xrightarrow{e} C'$ или $C \Longrightarrow C'$. Таким образом, отношение (\Longrightarrow) запрещает получение недостижимого по времени сечения в результате выполнения события, так как это означает, что время его выполнения еще не наступило. Заметим, что $\bullet N, N^\bullet \in \mathcal{RC}(TN)$, поскольку они не имеют параллельных сечений.

Помеченные на одном и том же множестве Act ВПСС $TN = (N, \tau)$ и $TN' = (N', \tau')$, где $N = (B, E, G, l)$ и $N' = (B', E', G', l')$, изоморфны (обозначается $TN \simeq TN'$ или $f : TN \simeq TN'$), если существует биективное отображение $f : B \cup E \rightarrow B' \cup E'$ (изоморфизм) такое, что:

- $f(B) = B'$ и $f(E) = E'$;
- $xGy \iff f(x)G'f(y)$ для всех $x, y \in B \cup E$;
- $\tau(C) = \tau'(f(C))$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N)$;
- $l(e) = l'(f(e))$.

Класс эквивалентности относительно изоморфизма, образованный ВПСС TN , будем обозначать как $[TN]_{\simeq}$.

Пусть $TN = (N, \tau)$ – ВПСС, $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ – НВСП_{сн} и $S = (M, I)$ – состояние \mathcal{TN} . Обозначим через $\mathcal{НОМ}_S(TN, \mathcal{TN})$ множество всех гомоморфизмов из N в \mathcal{N} относительно разметки M .

Пример 4. Рассмотрим ПСС N_1 , изображенную на рисунке 2. Определим функцию $\tau : \mathcal{CUT}(N_1) = \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, b_4\}, \{b_2, b_3\}, \{b_3, b_4\}, \{b_5, b_6\}\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ следующим образом: $\tau(\{b_1, b_2\}) = 0$, $\tau(\{b_1, b_4\}) = \perp$, $\tau(\{b_2, b_3\}) = 1$, $\tau(\{b_3, b_4\}) = 2$ и $\tau(\{b_5, b_6\}) = 3$. Поскольку в данной сети только два параллельных сечения $\{b_1, b_4\} \smile \{b_2, b_3\}$, $\tau(\{b_1, b_4\}) = \perp$ и $\tau(\{b_2, b_3\}) = 1 > 0$, то функция τ удовлетворяет условию из определения 5. Следовательно, $TN_1 = (N_1, \tau)$ – ВПСС и $\mathcal{RC}(TN_1) = \{\{b_1, b_2\}, \{b_2, b_3\}, \{b_3, b_4\}, \{b_5, b_6\}\}$.

Рассмотрим последовательность событий ВПСС (временной график), для которой существует цепочка временных сечений, полученная в результате последовательного выполнения данных событий.

Определение 6. Пусть $TN = (N, \tau)$ – ВПСС и $C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$. Последовательность событий $\omega = e_1 \dots e_n$ ($n \geq 0$) называется временным графиком из C в C' ВПСС TN , если существует цепочка сечений из $\mathcal{RC}(TN)$ вида:

$$C = C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n = C'.$$

Пусть $\mathcal{GRF}_{C \Rightarrow C'}(TN)$ – множество всех временных графиков ВПСС TN из C в C' . Обозначим $\mathcal{GRF}_{\Rightarrow C}(TN) = \mathcal{GRF}_{\bullet N \Rightarrow C}(TN)$ и $\mathcal{GRF}(TN) = \mathcal{GRF}_{\bullet N \Rightarrow N \bullet}(TN)$.

Пример 5. Пусть $TN_1 = (N_1, \tau)$ – ВПСС из примера 4. Рассмотрим последовательность $\omega = e_1 e_2 e_3$. Очевидно, что $\{b_1, b_2\} \xrightarrow{e_1} \{b_3, b_2\} \xrightarrow{e_2} \{b_3, b_4\} \xrightarrow{e_3} \{b_5, b_6\}$. Из примера 4, $\{b_1, b_2\}, \{b_3, b_2\}, \{b_3, b_4\}, \{b_5, b_6\} \in \mathcal{RC}(TN_1)$. Значит, $\{b_1, b_2\} \xRightarrow{e_1} \{b_3, b_2\} \xRightarrow{e_2} \{b_3, b_4\} \xRightarrow{e_3} \{b_5, b_6\}$, где $\{b_1, b_2\}$ – начальное, а $\{b_5, b_6\}$ – конечное сечение. Следовательно, $\omega \in \mathcal{GRF}(TN)$.

Таким образом, временные графики иллюстрируют «выполнения» ВПСС. Следующее утверждение доказывает существование временного графика между двумя произволь-

ными временными сечениями и, как следствие, между начальным и конечным сечением ВПСС.

Утверждение 1. Пусть TN — ВПСС. Если $C, C' \in \mathcal{RC}(TN)$ и $C \preceq C'$, то существует $\omega' \in \mathcal{GRF}_{C \Rightarrow C'}(TN)$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1 работы [1]. \square

Определим функцию **Clock**, которая будет связывать временные конструкции ВПСС и НВСП_{сл} относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегий сброса часов. Данная функция определяется в контексте некоторого состояния НВСП_{сл} и гомоморфизма φ относительно разметки этого состояния. В качестве параметров функции выступают временное сечение C и переход t , допустимый в разметке $\varphi(C)$. Значение функции **Clock** определяется с помощью произвольного временного графика из начального сечения в сечение C и соответствует времени с того момента, как переход t стал допустимым и оставался таким до конца временного графика.

Пусть $\dagger \in \{I, A\}$, TN — ВПСС, \mathcal{TN} — НВСП_{сл}, $S = (M, I)$ — состояние \mathcal{TN} и $\varphi \in \mathcal{HOM}_S(TN, \mathcal{TN})$. Для сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$, перехода $t \in \text{En}(\varphi(C))$ и временного графика $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}_{\Rightarrow C}(TN)$ из начального сечения в сечение C с последовательностью $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n = C$ определим функцию $\mathbf{Clock}_{\varphi, S}^{\dagger}(\omega, t)$ следующим образом:

$$\mathbf{Clock}_{\varphi, S}^I(\omega, t) = \begin{cases} \sum_{\max(k) < i \leq n} \tau(C_i), \text{ если } \exists k < n: t \notin \text{En}(\varphi(C_k \cap C_n)), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i) + I(t), \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$\mathbf{Clock}_{\varphi, S}^A(\omega, t) = \begin{cases} \sum_{\max(k) < i \leq n} \tau(C_i), \text{ если } \exists k < n: t \notin \text{En}(\varphi(C_k)), \\ \sum_{0 \leq i \leq n} \tau(C_i) + I(t), \text{ иначе;} \end{cases}$$

где $\dagger \in \{I, A\}$ указывает на промежуточную или устойчиво атомарную стратегию сброса часов.

В работе [2] показано, что для временного сечения C значение функции **Clock** не зависит от выбора временного графика из начального сечения в сечение C . Кроме того, в качестве параметров функции **Clock** можно рассматривать только сечение $C \in \mathcal{RC}(TN)$

и переход $t \in En(\varphi(C))$.

Далее определим временной процесс как пару из ВПСС и гомоморфизма с ограничениями на корректность временных конструкций.

Определение 7. Пусть $\dagger \in \{I, A\}$, $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ — НВСП_{сл}, $S = (M, I) \in \mathcal{RS}_\dagger(\mathcal{TN})$, $TN = (N, \tau)$ — ВПСС и $\varphi \in \mathcal{НОМ}_S(TN, \mathcal{TN})$. Пара $\pi = (TN, \varphi)$ называется временным процессом НВСП_{сл} \mathcal{TN} из состояния S относительно стратегии сброса часов \dagger , если для каждого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и события $e \in Fi(C)$ выполняется:

$$\mathbf{Clock}_{\varphi, S}^\dagger(C, \varphi(e)) \in D(\varphi(e)).$$

Пусть $\mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}, S)$ — множество всех временных процессов НВСП_{сл} \mathcal{TN} из состояния $S \in \mathcal{RS}_\dagger(\mathcal{TN})$ относительно стратегии сброса часов \dagger . Кроме того, обозначим $\mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}) = \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}, S_0)$, где S_0 — начальное состояние \mathcal{TN} . Временной процесс $\pi_0 = (((B_0, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \tau_0), \varphi_0)$ такой, что φ_0 — гомоморфизм относительно начальной разметки ($\varphi(B_0) = M_0$) и $\tau_0 \equiv 0$, называется *начальным*.

Два временных процесса $\pi = (TN, \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ из $\mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}, S)$, где $\dagger \in \{I, A\}$, $S \in \mathcal{RS}_\dagger(\mathcal{TN})$ и $TN = ((B, E, G, l), \tau)$, *изоморфны* (обозначается $\pi \simeq \pi'$ или $f : \pi \simeq \pi'$), если существует *изоморфизм* $f : TN \simeq TN'$ такой, что $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$ для любого $x \in B \cup E$. Класс эквивалентности относительно изоморфизма, образованный временным процессом π , будем обозначать как $[\pi]_{\simeq}$.

Пример 6. Рассмотрим НВСП_{сл} $\mathcal{TN}_1 = (\mathcal{N}_1, D)$ из примера 1, ВПСС $TN_1 = (N_1, \tau)$ из примера 4 и гомоморфизм φ из N_1 в \mathcal{N}_1 относительно начальной разметки из примера 3. Покажем, что пара $\pi = (TN_1, \varphi)$ является временным процессом \mathcal{TN}_1 из начального состояния $S_0 = (M_0, (I_0 \equiv 0))$ относительно промежуточной стратегии сброса часов. Для этого вычислим для каждого события e и сечения $C \in \mathcal{RC}(TN_1)$, в котором оно может произойти, значение функции $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C, \varphi(e))$ и убедимся, что оно принадлежит интервалу $D(\varphi(e))$. Напомним все временные сечения ВПСС TN_1 : $C_0 = \{b_1, b_2\}$, $C_1 = \{b_3, b_2\}$, $C_2 = \{b_3, b_4\}$, $C_3 = \{b_5, b_6\}$. Легко проверить, что $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \xrightarrow{e_2} C_2 \xrightarrow{e_3} C_3$. Тогда:

- $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C_0, \varphi(e_1)) = \tau(C_0) = 0 \in D(\varphi(e_1) = t_1) = [0, 1]$,
- $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C_1, \varphi(e_2)) = \tau(C_0) + \tau(C_1) = 0 + 1 \in D(\varphi(e_2) = t_2) = [0, 1]$,
- $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C_2, \varphi(e_3)) = \tau(C_2) = 2 \in D(\varphi(e_3) = t_3) = [1, 2]$.

Следовательно, $\pi = (TN_1, \varphi) \in \mathcal{PRC}_I(\mathcal{TN}_1)$.

Установим взаимосвязь между временными процессами и пробегами НВСП_{сл}. Введем функцию, отображающую временной график в последовательность хода времени и срабатываний переходов НВСП_{сл}.

Пусть \mathcal{TN} — НВСП_{сл}, TN — ВПСС, S — состояние \mathcal{TN} и $\varphi \in \mathcal{НОМ}_S(TN, \mathcal{TN})$. Для временного графика $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}_{\Rightarrow C}(TN)$ из начального сечения в сечение $C \in \mathcal{RC}(TN)$ с последовательностью $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n = C$ определим функцию Run_φ следующим образом: $Run_\varphi(TN, \omega) = \tau(C_0) \varphi(e_1) \tau(C_1) \dots \varphi(e_n) \tau(C_n)$.

Покажем, что если φ — гомоморфизм относительно начальной разметки и Run_φ отображает ω в пробег из начального состояния в состояние (M', I') относительно стратегии $\dagger \in \{I, A\}$, то $\varphi(C) = M'$ и значение $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^\dagger(C, t)$ равно $I'(t)$ для любого перехода $t \in En(M')$.

Утверждение 2. Пусть $\dagger \in \{I, A\}$, \mathcal{TN} — НВСП_{сл}, TN — ВПСС, $\varphi \in \mathcal{НОМ}_{S_0}(TN, \mathcal{TN})$ и $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}_{\Rightarrow C}(TN)$ для $C \in \mathcal{RC}(TN)$ с последовательностью $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n = C$. Если $Run_\varphi(TN, \omega) \in \mathcal{RUN}_\dagger(\mathcal{TN})$, т.е. $(M_0, I_0) \xrightarrow{\tau(C_0)} (M_0, \tilde{I}_0) \xrightarrow{\varphi(e_1)_\dagger} (M_1, I_1) \xrightarrow{\varphi(C_1)} (M_1, \tilde{I}_1) \dots (M_{n-1}, \tilde{I}_{n-1}) \xrightarrow{\varphi(e_n)_\dagger} (M_n, I_n) \xrightarrow{\varphi(C_n)} (M_n, \tilde{I}_n)$, то для каждого $0 \leq i \leq n$ выполняется:

- (а) Сужение функции φ на C_i — биекция между C_i и M_i .
- (б) $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^\dagger(C_i, t) = \tilde{I}_i(t)$ для всех $t \in En(M_i)$.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 2 работы [10]. □

Для временного процесса $\pi = (TN, \varphi)$ относительно стратегии $\dagger \in \{I, A\}$ обозначим через $\mathcal{RUN}_\dagger(\pi)$ множество всех последовательностей $Run_\varphi(TN, \omega)$, где $\omega \in \mathcal{GRF}(TN)$. Рассмотренные в работе [10] теоремы указывают на взаимно однозначное соответствие между пробегами НВСП_{сл} и временными графиками временных процессов НВСП_{сл}, которое достигается при помощи функции Run .

Утверждение 3. Пусть $\dagger \in \{I, A\}$ и \mathcal{TN} — НВСП_{сл}.

- Если $\pi \in \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN})$, то $\mathcal{RUN}_\dagger(\pi) \subseteq \mathcal{RUN}_\dagger(\mathcal{TN})$.
- Если $\sigma \in \mathcal{RUN}_\dagger(\mathcal{TN})$, то существует единственный с точностью до изоморфизма $\pi \in \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN})$ такой, что $\sigma \in \mathcal{RUN}_\dagger(\pi)$.

Доказательство. Аналогично доказательствам теорем 1-3 работы [10]. □

Далее рассмотрим последовательности изменений (расширений) временных процессов и их взаимосвязи с состояниями НВСП_{сл}. Сначала введем конструкцию «подсети» ПСС

— части ПСС, заключенной между двумя её сечениями.

Пусть $N = (B, E, G, l)$ — ПСС и $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ такие, что $C \preceq C'$. Определим $N_{C \rightarrow C'} = (B', E', G', l')$, где:

- $B' = \bigcup_{C \preceq \hat{C} \preceq C'} \hat{C}$;
- $E' = \downarrow C' \setminus \downarrow C$;
- $G' = G \cap ((B' \times E') \cup (E' \times B'))$;
- $l' = l|_{E'}$.

Используя конструкцию причинно-следственных «подсетей», определим понятие расширения для ВПСС.

Пусть $\widehat{TN} = (\widehat{N}, \widehat{\tau})$ — ВПСС. Будем писать $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widehat{TN}$, если существует $\widetilde{C} \in \mathcal{RC}(\widehat{TN})$ такое, что:

- $TN = (N, \tau)$, $\widehat{TN} = (\widehat{N}, \widehat{\tau})$;
- $N = \widetilde{N}_{\bullet \rightarrow \widetilde{C}}$, $\widehat{N} = \widetilde{N}_{\widetilde{C} \rightarrow \bullet}$;
- $\tau : \mathcal{CUT}(N) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ и $\tau(C) = \widetilde{\tau}(C)$ для всех $C \in \mathcal{CUT}(N) \setminus \widetilde{C}$;
- $\widehat{\tau} : \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ и $\widehat{\tau}(\widehat{C}) = \widetilde{\tau}(\widehat{C})$ для всех $\widehat{C} \in \mathcal{CUT}(\widehat{N}) \setminus \widetilde{C}$;
- $\widetilde{\tau}(\widetilde{C}) = \tau(\widetilde{C}) + \widehat{\tau}(\widetilde{C})$.

Аналогично определим расширения для временных процессов НВСП_{сл}.

Рассмотрим произвольный временной процесс $\widetilde{\pi} = (\widetilde{TN}, \widetilde{\varphi}) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN})$. Будем писать $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$, если выполняется:

- $\pi = (TN, \varphi)$ и $\widehat{\pi} = (\widehat{TN}, \widehat{\varphi})$;
- $TN \xrightarrow{\widehat{TN}} \widehat{TN}$;
- $\varphi = \widetilde{\varphi}|_{B \cup E}$ и $\widehat{\varphi} = \widetilde{\varphi}|_{\widehat{B} \cup \widehat{E}}$.

В этом случае $\widetilde{\pi}$ — расширение π на $\widehat{\pi}$. Кроме того, π будем называть *префиксом*, а $\widehat{\pi}$ — *суффиксом* $\widetilde{\pi}$.

В работе [1] показано, что префикс и суффикс расширения временного процесса НВСП_{сл} также являются временными процессами.

Пусть $\pi \xrightarrow{\widehat{\pi}} \widetilde{\pi}$ для $\widetilde{\pi} \in \mathcal{PRC}_{\dagger}(\mathcal{TN})$, НВСП_{сл} \mathcal{TN} и $\dagger \in \{I, A\}$. Рассмотрим частные случаи расширений временных процессов:

- $\widetilde{\pi}$ — расширение π на время θ (обозначается $\pi \xrightarrow{\theta} \widetilde{\pi}$), если $\widehat{E} = \emptyset$ и $\widehat{\tau}(\widehat{B}) = \theta$;
- $\widetilde{\pi}$ — расширение π на действие a (обозначается $\pi \xrightarrow{a} \widetilde{\pi}$), если $\widehat{E} = \{e\}$, $\widehat{l}(e) = a$ и $\widehat{\tau} \equiv 0$.

4. Эквивалентности

Рассмотренная в предыдущей главе модель временных процессов позволяет сравнивать поведение НВСП_{сл} с учетом частичного порядка между их элементами. В этом разделе для НВСП_{сл} мы рассмотрим предложенные в [2] языковые (поведение описывается набором «линейных» последовательностей выполнений системы) и бисимуляционные (учитывают точки недетерминированного выбора альтернативных действий) эквивалентности для семантики *интерливинга* и *процессно-сетевой семантики*. Далее будем использовать $\dagger \in \{I, A\}$ для обозначения промежуточной или устойчиво атомарной стратегии сброса часов НВСП_{сл}. Кроме того, через i будем обозначать интерливинговую, а через n — процессно-сетевую семантики.

Обобщим классическое определение языковой эквивалентности, основанное на пробегах сетей Петри. Для НВСП_{сл} \mathcal{TN} с помечающей функцией L и пробега $\sigma = \theta_0 t_1 \theta_1 \dots t_n \theta_n \in \mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN}, S)$ из произвольного состояния S определим последовательность из хода времени и действий $L(\mathcal{TN}, \sigma) = \theta_0 L(t_1) \theta_1 \dots L(t_n) \theta_n$.

Определение 8. Пусть $\mathcal{TN}, \mathcal{TN}'$ — НВСП_{сл}, помеченные на Act .

- $Lang_{\dagger}(\mathcal{TN}) = \{L(\mathcal{TN}, \sigma) \mid \sigma \in \mathcal{RUN}_{\dagger}(\mathcal{TN})\}$.
- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' интерливингово языково эквивалентны относительно стратегии \dagger (обозначается $\mathcal{TN} \cong_i^{\dagger} \mathcal{TN}'$), если $Lang_{\dagger}(\mathcal{TN}) = Lang_{\dagger}(\mathcal{TN}')$.

Далее определим языковые эквивалентности в двух семантиках, основанные на временных процессах НВСП_{сл}. Для ВПСС $TN = ((B, E, G, l), \tau)$ и временного графика $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN)$ с последовательностью сечений $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n$ определим последовательность из хода времени и действий $l(TN, \omega) = \tau(C_0) l(e_1) \tau(C_1) \dots l(e_n) \tau(C_n)$.

Определение 9. Пусть $\mathcal{TN}, \mathcal{TN}'$ — НВСП_{сл}, помеченные на Act , и $\star \in \{i, n\}$.

- $Trace_{\dagger}^{\star}(\mathcal{TN}) = \{l(TN, \omega) \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}_{\dagger}(\mathcal{TN}), \omega \in \mathcal{GRF}(TN)\}$;
- $Trace_n^{\dagger}(\mathcal{TN}) = \{[TN]_{\simeq} \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}_{\dagger}(\mathcal{TN})\}$.
- \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' \star -языково эквивалентны относительно стратегии \dagger (обозначается $\mathcal{TN} \equiv_{\star}^{\dagger} \mathcal{TN}'$), если $Trace_{\dagger}^{\star}(\mathcal{TN}) = Trace_{\dagger}^{\star}(\mathcal{TN}')$.

Пример 7. Рассмотрим НВСП_{сл} \mathcal{TN}_2 и \mathcal{TN}_3 на рисунке 3. Видно, что $Lang^A(\mathcal{TN}_2) = Lang^A(\mathcal{TN}_3)$. Значит, согласно определению 8, \mathcal{TN}_2 и \mathcal{TN}_3 интерливингово языково эквивалентны относительно устойчиво атомарной стратегии сброса часов, т.е. $\mathcal{TN}_2 \cong_i^A \mathcal{TN}_3$. С другой стороны, $\mathcal{TN}_2 \not\cong_i^I \mathcal{TN}_3$, поскольку, например, $2b2a2 \in$

$Lang^I(\mathcal{TN}_2)$, но $2b2a2 \notin Lang^I(\mathcal{TN}_3)$. Аналогично, $\mathcal{TN}_2 \equiv_i^A \mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_2 \not\equiv_i^I \mathcal{TN}_3$.

Покажем, что НВСП_{сл} \mathcal{TN}_2 и \mathcal{TN}_3 на рисунке 3 не являются n -языково эквивалентными ни относительно промежуточной, ни относительно устойчиво атомарной стратегии сброса часов, т.е. $\mathcal{TN}_2 \not\equiv_n^I \mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_2 \not\equiv_n^A \mathcal{TN}_3$. Действительно, у \mathcal{TN}_3 найдется временной процесс из начального состояния, где события действий a и b будут параллельными, тогда как у \mathcal{TN}_2 подобного процесса не существует.

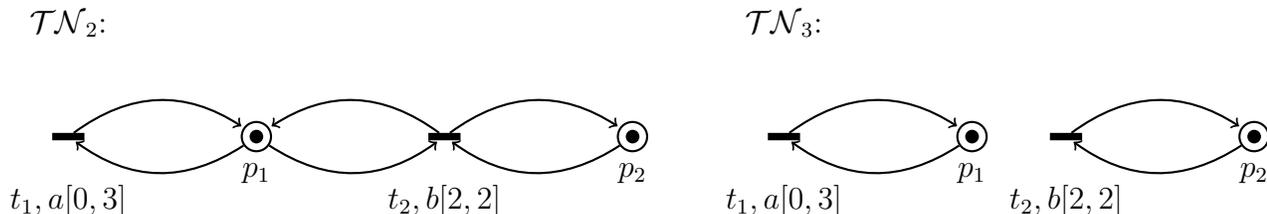


Рис. 3: Непрерывно-временные сети Петри \mathcal{TN}_2 и \mathcal{TN}_3

Бисимуляционные эквивалентности, в отличие от языковых, учитывают момент недетерминированного выбора между несколькими расширениями процесса (ветвления). Сначала рассмотрим обычные бисимуляционные эквивалентности. Начнем с определения интерливинговых бисимуляционных эквивалентностей, основанных на состояниях НВСП_{сл}.

Определение 10. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются интерливингово бисимуляционно эквивалентными относительно стратегии \dagger (обозначается $\mathcal{TN} \sim_i^\dagger \mathcal{TN}'$), если существует отношение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{RS}_\dagger(\mathcal{TN}) \times \mathcal{RS}_\dagger(\mathcal{TN}')$ такое, что $(S_0, S'_0) \in R$ и для всех $(S, S') \in R$ выполняется:

- (1) если $S \xrightarrow{x}_\dagger \tilde{S}$, где $x \in Act \cup \mathbb{N}$, тогда существует пара $(\tilde{S}, \tilde{S}') \in R$ такая, что $S' \xrightarrow{x}_\dagger \tilde{S}'$;
- (2) как пункт (1), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Теперь определим бисимуляционные эквивалентности, основанные на временных процессах НВСП_{сл}.

Определение 11. Пусть $\star \in \{i, n\}$. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Act , являются \star -бисимуляционно эквивалентными относительно стратегии \dagger (обозначается $\mathcal{TN} \equiv_\star^\dagger \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}) \times \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}')$ такое, что $(\pi_0, \pi'_0) \in R$ и для всех $(\pi, \pi') \in R$ выполняется:

- (1) если $\pi \xrightarrow{\hat{\pi}} \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN})$ и
 - $\tilde{\pi}$ – расширение π на время $\theta \in \mathbb{N}$ (действие $a \in Act$), в случае $\star = i$,

тогда существует пара $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}') \in R$ такая, что $\pi' \xrightarrow{\hat{\pi}'} \tilde{\pi}'$ и

- $\tilde{\pi}'$ – расширение π' на время θ (действие a), в случае $\star = i$;
- $\widehat{TN} \simeq \widehat{TN}'$, в случае $\star = n$;

(2) как пункт (1), но роли TN и TN' меняются.

Пример 8. Рассмотрим НВСП_{сл} TN_4 и TN_5 на рисунке 4. Как можно видеть, $TN_4 \equiv_n^\dagger TN_5$ ($\dagger \in \{I, A\}$), согласно определению 9.

Покажем, что $TN_4 \not\equiv_i^\dagger TN_5$. Предположим, что это не так, т.е. существует некоторая бисимуляция R , соответствующая определению 11. Тогда $(\pi_0, \pi'_0) \in R$, согласно данному определению.

Рассмотрим временной процесс π'_1 НВСП_{сл} TN_5 , который соответствует срабатыванию перехода t_2 и является расширением π'_0 на событие a , т.е. $\pi'_0 \xrightarrow{a} \pi'_1$. Согласно определению 11, для π_0 должно существовать аналогичный временной процесс π_1 – расширение π_0 на событие a и $(\pi_1, \pi'_1) \in R$. Это означает, что π_1 соответствует срабатыванию перехода t_1 НВСП_{сл} TN_4 .

Процесс π_1 может быть расширен до процесса π_2 в результате действия a (повторное срабатывание перехода t_1 НВСП_{сл} TN_4), т.е. $\pi_1 \xrightarrow{a} \pi_2$. Значит, по определению 11, должна существовать пара $(\pi_2, \pi'_2) \in R$ такая, что $\pi'_1 \xrightarrow{a} \pi'_2$. Однако, процесс π'_1 не имеет расширений в результате действия a . Полученное противоречие доказывает, что $TN_4 \not\equiv_i^\dagger TN_5$.

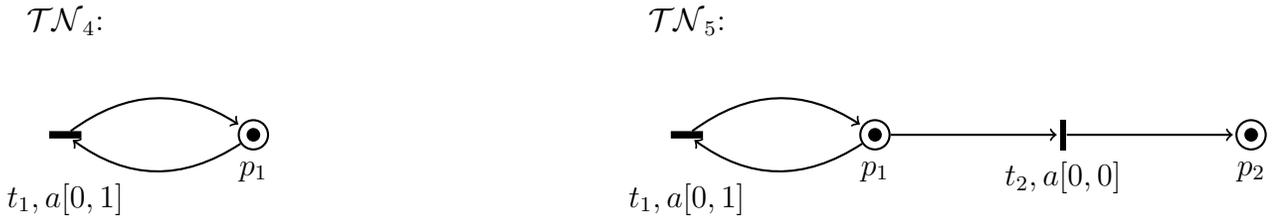


Рис. 4: Непрерывно-временные сети Петри TN_4 и TN_5

В работе [2] показано, что интерливинговая языковая эквивалентность и интерливинговая бисимуляционная эквивалентность, основанные на пробегах и состояниях НВСП_{сл}, совпадают соответственно с интерливинговой языковой и интерливинговой бисимуляционной эквивалентностями, основанными на временных процессах. Данный факт подтверждает корректность предложенных определений эквивалентностей, основанных на временных процессах.

Утверждение 4. Для НВСП_{сл} \mathcal{TN} , \mathcal{TN}' , помеченных на одном и том же множестве действий, выполняется:

- $\mathcal{TN} \cong_i^\dagger \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \equiv_i^\dagger \mathcal{TN}'$;
- $\mathcal{TN} \sim_i^\dagger \mathcal{TN}' \iff \mathcal{TN} \Leftrightarrow_i^\dagger \mathcal{TN}'$.

Доказательство. Аналогично доказательству теорем 1 и 2 работы [2]. □

Далее рассмотрим эквивалентности, которые учитывают предыдущее функционирование системы, ту часть процесса, которая привела из начального состояния в текущее. Для произвольных НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' определим множество изоморфизмов ВПСС их временных процессов следующим образом: $\mathcal{F}_\dagger(\mathcal{TN}, \mathcal{TN}') = \{f : TN \simeq TN' \mid (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}), (TN', \varphi') \in \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}')\}$. Через f_0 будем обозначать изоморфизм между ВПСС начальных временных процессов.

Определение 12. НВСП_{сл} \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' , помеченные над Ast , являются n -бисимуляционно эквивалентными с сохранением истории относительно стратегии \dagger (обозначается $\mathcal{TN} \Leftrightarrow_n^{h\dagger} \mathcal{TN}'$), если существует отображение (бисимуляция) $R \subseteq \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}) \times \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN}') \times \mathcal{F}_\dagger(\mathcal{TN}, \mathcal{TN}')$ такое, что $(\pi_0, \pi'_0, f_0) \in R$ и для всех $(\pi, \pi', f) \in R$ выполняется:

- (1) $f : TN \simeq TN'$;
- (2) если $\pi \rightarrow \tilde{\pi}$ для $\tilde{\pi} \in \mathcal{PRC}_\dagger(\mathcal{TN})$, тогда существует тройка $(\tilde{\pi}, \tilde{\pi}', \tilde{f}) \in R$ такая, что $\pi' \rightarrow \tilde{\pi}'$ и $f \subseteq \tilde{f}$;
- (3) как пункт (2), но роли \mathcal{TN} и \mathcal{TN}' меняются.

Пример 9. Рассмотрим НВСП_{сл} \mathcal{TN}_6 и \mathcal{TN}_7 на рисунке 5. Покажем, что $\mathcal{TN}_6 \not\sim_n^{h\dagger} \mathcal{TN}_7$ для $\dagger \in \{I, A\}$. Предположим обратное, т.е. что существует бисимуляция R из определения 12. Тогда $(\pi_0, \pi'_0, f_0) \in R$.

Пусть π_1 — расширение π_0 , соответствующее срабатыванию перехода t_4 , т.е. $\pi_0 \rightarrow \pi_1$. Значит, по определению 12, существует тройка $(\pi_1, \pi'_1, f_1) \in R$ такая, что $\pi'_0 \rightarrow \pi'_1$ и $f_1 : TN_1 \simeq TN'_1$. В этом случае, π'_1 соответствует срабатыванию перехода t_1 НВСП_{сл} \mathcal{TN}_7 .

Далее, π'_1 может быть расширено до временного процесса π'_2 в результате срабатывания перехода t_2 с временной задержкой 2. Согласно определению 12, должна существовать тройка $(\pi_2, \pi'_2, f_2) \in R$ такая, что $\pi_1 \rightarrow \pi_2$ и $f_2 : TN_2 \simeq TN'_2$. Однако, такого расширения временного процесса π_1 с изоморфизмом ВПСС у \mathcal{TN}_6 не существует, что

приводит к противоречию. Следовательно, $\mathcal{TN}_6 \not\stackrel{h^\dagger}{\sim}_n \mathcal{TN}_7$.

С другой стороны, данные сети n -бисимуляционно эквивалентны относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегий сброса часов.

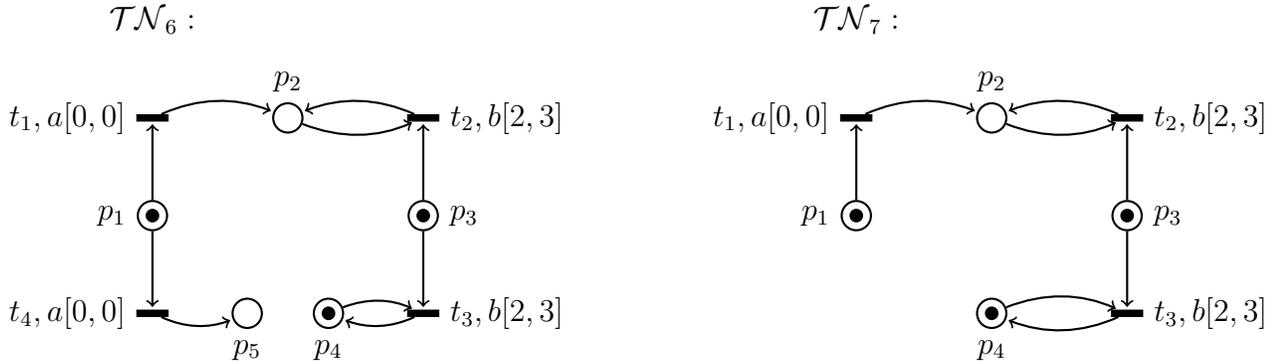


Рис. 5: Непрерывно-временные сети Петри \mathcal{TN}_6 и \mathcal{TN}_7

В работе [2] рассмотрен ряд других эквивалентностей относительно устойчиво атомарной стратегии сброса часов, изучены взаимосвязи между ними. Заметим, что представленные в [2] определения аналогично можно рассмотреть относительно промежуточной стратегии, а доказательство иерархии данных эквивалентностей будет в точности повторять рассуждения, используемые для устойчиво атомарной стратегии.

Утверждение 5. Пусть $\mathcal{TN}, \mathcal{TN}'$ — НВСП_{сл}, помеченные на одном и том же множестве действий. Для эквивалентностей R и \tilde{R} из множества $\{ \cong_i^\dagger, \equiv_i^\dagger, \equiv_n^\dagger, \sim_i^\dagger, \Leftrightarrow_i^\dagger, \Leftrightarrow_n^\dagger, \Leftrightarrow_n^{h^\dagger} \}$

$$\mathcal{TN} R \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \tilde{R} \mathcal{TN}'$$

тогда и только тогда, когда в графе на Рисунке 6 существует путь от R к \tilde{R} .

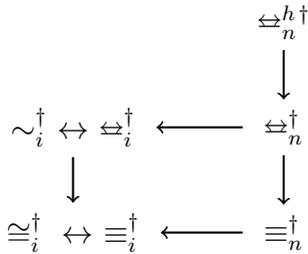


Рис. 6: Иерархия эквивалентностей

Доказательство. Является обобщением доказательства иерархии эквивалентностей работы [2] (Следствие 1). □

5. Сравнение эквивалентностей относительно стратегий сброса часов

В этом разделе будет исследовано, как изменение стратегии сброса часов НВСП_{сл} влияет на эквивалентность рассматриваемых сетей. Сначала исследуем данный вопрос на подклассе НВСП_{сл}, исключая места, которые являются одновременно входными и выходными для одного перехода.

Определение 13. Пусть $\mathcal{TN} = ((P, T, F, M_0, L), D)$ – НВСП_{сл}.

- Пара $(p, t) \in P \times T$ – петля, если $p \in \bullet t \cap t \bullet$.
- \mathcal{TN} называется простой НВСП_{сл} (без петель), если $\bullet t \cap t \bullet = \emptyset$ для всех $t \in T$.

Рассмотрим пример, сравнивающий поведение НВСП_{сл} с петлей относительно разных стратегий сброса часов.

Пример 10. Сеть \mathcal{TN}_8 на рисунке 1 имеет петлю, образованную местом p_1 и переходом t_1 . При использовании промежуточной стратегии сброса часов, срабатывание перехода t_1 будет каждый раз сбрасывать часы данного перехода. Как следствие, последовательность $\sigma = 1 t_1 1 t_1 1$ будет являться пробегом из начального состояния относительно промежуточной стратегии сброса часов, т.е. $\sigma \in \mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN})$. Напротив, при устойчиво атомарной стратегии часы перехода t_1 никогда не будут сбрасываться. Значит, $\sigma \notin \mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN})$, поскольку второе срабатывание t_1 в данной последовательности невозможно (значение часов перехода 2 выйдет за пределы временного интервала $[0, 1]$ перехода). Следовательно, $\mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN}) \neq \mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN})$, т.е. поведение НВСП_{сл} для двух стратегий сброса часов будет отличаться.

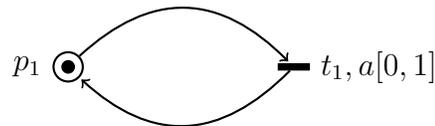


Рис. 7: Непрерывно-временная сеть Петри \mathcal{TN}_8

Докажем, что промежуточная и устойчиво атомарная стратегии сброса часов порождают одинаковое поведение для простых НВСП_{сл}.

Теорема 1. Пусть \mathcal{TN} – простая НВСП_{сл}. Тогда:

- (а) $\mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN}) = \mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN})$,
- (б) $\mathcal{PRC}_I(\mathcal{TN}) = \mathcal{PRC}_A(\mathcal{TN})$.

Доказательство. Сначала покажем, что для НВСП_{сл} \mathcal{TN} срабатывание перехода относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегий сброса часов приводит к одинаковым состояниям.

Замечание 1. Для состояния $S = (M, I)$ и перехода $t \in Fi(S)$ НВСП_{сл} \mathcal{TN} выполняется $(M, I) \xrightarrow{t}_I (M', I') \iff (M, I) \xrightarrow{t}_A (M', I')$.

Доказательство замечания. Поскольку, $t \in Fi(S)$, то $(M, I) \xrightarrow{t}_I (M', I')$ и $(M, I) \xrightarrow{t}_A (M', I'')$, где $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$, $I'(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \uparrow enabled_I(t', M, t), \\ I(t), & \text{иначе;} \end{cases}$ и $I''(t) =$

$\begin{cases} 0, & \text{если } \uparrow enabled_A(t', M, t), \\ I(t), & \text{иначе;} \end{cases}$ для всех $t' \in En(M')$, по определению 2. Покажем,

что $\forall t' \in En(M') : I'(t) = I''(t)$, т.е. $\uparrow enabled_I(t', M, t) = \uparrow enabled_A(t', M, t)$. Рассмотрим произвольное $t' \in En(M)$. По определению 2, $\uparrow enabled_I(t', M, t) = t' \notin En(M \setminus \bullet t) \wedge t' \in En(M')$. Если $t' \notin En(M \setminus \bullet t)$, то $t' \notin En(M)$ или $\bullet t' \cap \bullet t \neq \emptyset$. Значит, $\uparrow enabled_I(t', M, t) = (t' \notin En(M) \vee \bullet t' \cap \bullet t \neq \emptyset) \wedge t' \in En(M') = (t' \notin En(M) \wedge t' \in En(M')) \vee (\bullet t' \cap \bullet t \neq \emptyset \wedge t' \in En(M'))$. Предположим, $\bullet t' \cap \bullet t \neq \emptyset \wedge t' \in En(M')$ — истина. Тогда $\bullet t' \subseteq M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$, так как $t' \in En(M')$. Кроме того, из $\bullet t' \cap \bullet t \neq \emptyset$ следует, что $((M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet) \cap \bullet t = ((M \setminus \bullet t) \cap \bullet t) \cup (t^\bullet \cap \bullet t) = t^\bullet \cap \bullet t \neq \emptyset$. Получили противоречие с тем, что $\bullet t \cap t^\bullet = \emptyset$, поскольку \mathcal{TN} — простая. Следовательно, $\bullet t' \cap \bullet t \neq \emptyset \wedge t' \in En(M')$ — ложь. Получаем, $\uparrow enabled_I(t', M, t) = t' \notin En(M) \wedge t' \in En(M') = \uparrow enabled_A(t', M, t)$, по определению 2. \square

Доказательство теоремы.

(а) Рассмотрим произвольный пробег $\sigma = \theta_0 t_1 \theta_1 \dots t_n \theta_n \in \mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN})$ с последовательностью состояний $(M_0, I_0) \xrightarrow{\theta_0} (M_0, \tilde{I}_0) \xrightarrow{t_1}_I (M_1, I_1) \xrightarrow{\theta_1} (M_1, \tilde{I}_1) \dots (M_{n-1}, \tilde{I}_{n-1}) \xrightarrow{t_n}_I (M_n, I_n) \xrightarrow{\theta_n} (M_n, \tilde{I}_n)$. По определению 2 и замечанию 1, $(M_0, I_0) \xrightarrow{\theta_0} (M_0, \tilde{I}_0) \xrightarrow{t_1}_A (M_1, I_1) \xrightarrow{\theta_1} (M_1, \tilde{I}_1) \dots (M_{n-1}, \tilde{I}_{n-1}) \xrightarrow{t_n}_A (M_n, I_n) \xrightarrow{\theta_n} (M_n, \tilde{I}_n)$, т.е. $\sigma \in \mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN})$. Значит, $\mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN}) \subseteq \mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN})$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN}) \subseteq \mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN})$. Следовательно, $\mathcal{RUN}_I(\mathcal{TN}) = \mathcal{RUN}_A(\mathcal{TN})$.

(б) Рассмотрим произвольный временной процесс $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}_I(\mathcal{TN}) = \mathcal{PRC}_I(\mathcal{TN}, S_0)$, где $TN = (N, \tau)$ и $N = (B, E, G, l)$. Тогда для каждого сечения $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и события $e \in Fi(C)$ выполняется $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C, \varphi(e)) \in D(\varphi(e))$, по определению 7. Покажем, что $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}_A(\mathcal{TN})$, т.е. $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^A(C, \varphi(e)) \in D(\varphi(e))$ для всех $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и $e \in Fi(C)$.

Рассмотрим произвольные $C \in \mathcal{RC}(TN)$ и $e \in Fi(C)$. Тогда $C \xrightarrow{e} C'$ для $C' =$

$(C \setminus \bullet e) \cup e \bullet \in \mathcal{RC}(TN)$. Так как $\bullet N \preceq C$, $C' \preceq N \bullet$ и $\bullet N, C, C', N \bullet \in \mathcal{RC}(TN)$, то, по утверждению 1, существует $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{GRF}(TN)$ такой, что $\bullet N = C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \dots (C_{i-1} = C) \xrightarrow{(e_i=e)} C_i = C' \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} C_n = N \bullet$ для $n > 0$ и $0 < i \leq n$. По утверждению 3, последовательность $Run_\varphi(TN, \omega) = \tau(C_0)\varphi(e_1)\tau(C_1) \dots \varphi(e_n)\tau(C_n) \in RUN_I(\pi) \subseteq RUN_I(TN)$ — пробег, т.е. имеет место последовательность состояний $(M_0, I_0) \xrightarrow{\tau(C_0)} (M_0, \tilde{I}_0) \xrightarrow{\varphi(e_1)}_I (M_1, I_1) \xrightarrow{\tau(C_1)} (M_1, \tilde{I}_1) \dots (M_{n-1}, \tilde{I}_{n-1}) \xrightarrow{\varphi(e_n)}_I (M_n, I_n) \xrightarrow{\tau(C_n)} (M_n, \tilde{I}_n)$. Согласно определению 2 и замечанию 1, $(M_0, I_0) \xrightarrow{\tau(C_0)} (M_0, \tilde{I}_0) \xrightarrow{\varphi(e_1)}_A (M_1, I_1) \xrightarrow{\tau(C_1)} (M_1, \tilde{I}_1) \dots (M_{n-1}, \tilde{I}_{n-1}) \xrightarrow{\varphi(e_i)}_A (M_n, I_n) \xrightarrow{\tau(C_n)} (M_n, \tilde{I}_n)$. Кроме того, $\varphi(e_i) \in En(M_{i-1})$. Значит, $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^A(C_{i-1}, \varphi(e_i)) = \tilde{I}_{i-1}(\varphi(e_i)) = \mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C_{i-1}, \varphi(e_i))$, благодаря утверждению 2. Следовательно, $\mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^A(C, \varphi(e)) = \mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^A(C_{i-1}, \varphi(e_i)) = \mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C_{i-1}, \varphi(e_i)) = \mathbf{Clock}_{\varphi, S_0}^I(C, \varphi(e)) \in D(\varphi(e))$. Получаем, $\mathcal{PRC}_I(TN) \subseteq \mathcal{PRC}_A(TN)$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{PRC}_A(TN) \subseteq \mathcal{PRC}_I(TN)$, т.е. $\mathcal{PRC}_I(TN) = \mathcal{PRC}_A(TN)$. □

Из данной теоремы следует совпадение эквивалентностей относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегий сброса часов для класса простых НВСП_{сл}.

Теорема 2. Пусть TN, TN' — простые НВСП_{сл}, помеченные на одном и том же множестве действий. Тогда $TN R^I TN' \iff TN R^A TN'$, где $R \in \{ \cong_i, \equiv_i, \equiv_n, \sim_i, \Leftarrow_i, \Leftarrow_n, \Leftarrow_n^h \}$.

Доказательство. Следует из теоремы 1 и определений 8-12. □

Покажем, что в общем случае из эквивалентности НВСП_{сл} относительно одной стратегии сброса часов не будет следовать эквивалентность данных сетей относительно другой стратегии сброса часов.

Теорема 3. Пусть TN, TN' — НВСП_{сл}, помеченные на одном и том же множестве действий. Тогда:

$$(a) TN R TN' \not\Leftarrow TN \tilde{R} TN',$$

$$(b) TN \tilde{R} TN' \not\Leftarrow TN R TN',$$

где $R \in \{ \cong_i^I, \equiv_i^I, \equiv_n^I, \sim_i^I, \Leftarrow_i^I, \Leftarrow_n^I, \Leftarrow_n^{hI} \}$ и $\tilde{R} \in \{ \cong_i^A, \equiv_i^A, \equiv_n^A, \sim_i^A, \Leftarrow_i^A, \Leftarrow_n^A, \Leftarrow_n^{hA} \}$.

Доказательство. (a) Рассмотрим НВСП_{сл} TN_9 и TN_{10} на рисунке 8. Видно, что

$$TN_9 \Leftarrow_n^{hI} TN_{10}. \text{ Покажем, что } TN_9 \not\Leftarrow_i^A TN_{10}. \text{ Поскольку срабатывание пере-}$$

хода t_1 в НВСП_{сл} \mathcal{TN}_9 при устойчиво атомарной стратегии сброса часов не сбрасывает часы этого перехода, то действие a может повторяться только в пределах временного интервала $[0, 1]$. Как следствие, слова «1a1a1» языка $Lang^A(\mathcal{TN}_{10})$ не будет в языке $Lang^A(\mathcal{TN}_9)$, т.е. $Lang^A(\mathcal{TN}_9) \neq Lang^A(\mathcal{TN}_{10})$. Следовательно, $\mathcal{TN}_9 \not\cong_i^A \mathcal{TN}_{10}$, по определению 8. Значит, $\mathcal{TN} \not\cong_n^{hI} \mathcal{TN}' \not\cong \mathcal{TN} \cong_i^A \mathcal{TN}'$. Так как $\mathcal{TN} \cong_n^{hI} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} R \mathcal{TN}'$ и $\mathcal{TN} \tilde{R} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \cong_i^A \mathcal{TN}'$, согласно утверждению 5, то $\mathcal{TN} R \mathcal{TN}' \not\cong \mathcal{TN} \tilde{R} \mathcal{TN}'$.

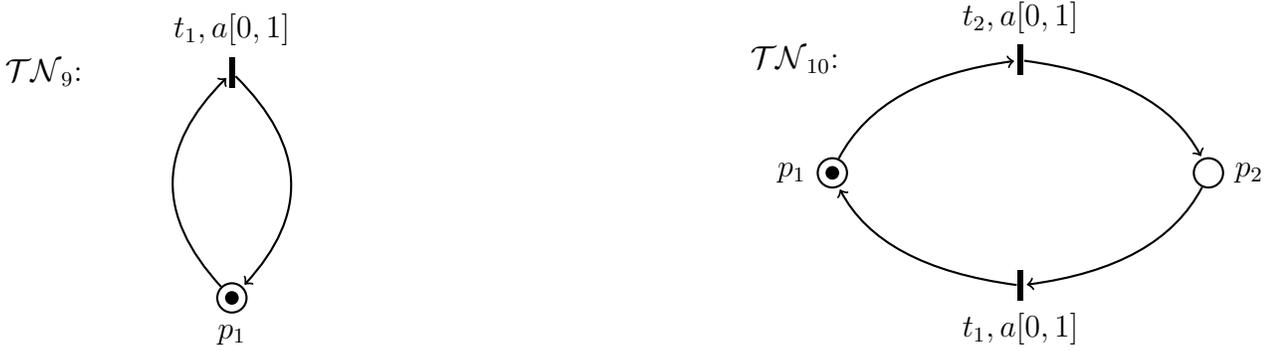


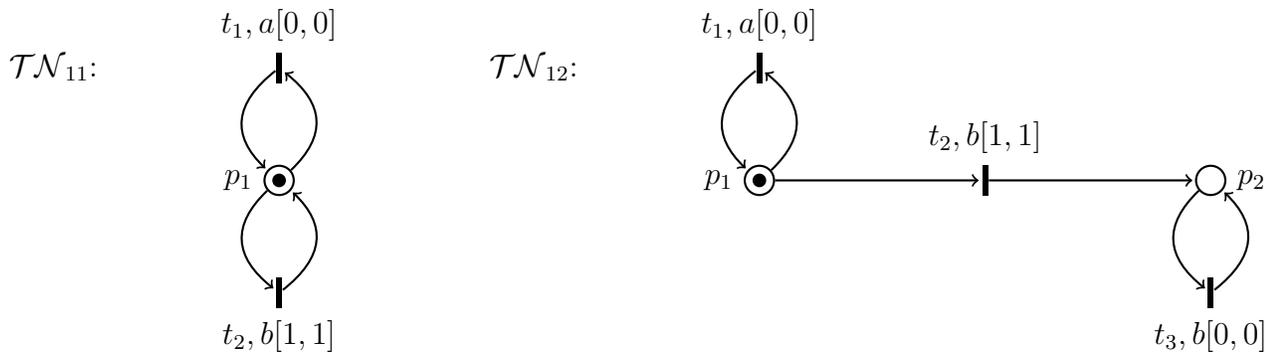
Рис. 8: Непрерывно-временные сети Петри \mathcal{TN}_9 и \mathcal{TN}_{10}

(б) Рассмотрим НВСП_{сл} \mathcal{TN}_{11} и \mathcal{TN}_{12} на Рисунке 9. Видно, что в случае устойчиво атомарной стратегии сброса часов $\mathcal{TN}_{11} \cong_n^{hA} \mathcal{TN}_{12}$.

Покажем, что $\mathcal{TN}_{11} \not\cong_i^I \mathcal{TN}_{12}$. Поскольку срабатывание перехода t_2 в НВСП_{сл} \mathcal{TN}_{11} при промежуточной стратегии сбрасывает часы перехода t_1 , то действие a может следовать за действием b . Подобного поведения нет в НВСП_{сл} \mathcal{TN}_{12} . Как следствие, слова «1b0a1» языка $Lang^I(\mathcal{TN}_{11})$ не будет в языке $Lang^I(\mathcal{TN}_{12})$, т.е. $Lang^I(\mathcal{TN}_{11}) \neq Lang^I(\mathcal{TN}_{12})$. Следовательно, $\mathcal{TN}_{11} \not\cong_i^I \mathcal{TN}_{12}$, по определению 8. Значит, $\mathcal{TN} \not\cong_n^{hA} \mathcal{TN}' \not\cong \mathcal{TN} \cong_i^I \mathcal{TN}'$. Так как $\mathcal{TN} \cong_n^{hA} \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \tilde{R} \mathcal{TN}'$ и $\mathcal{TN} R \mathcal{TN}' \Rightarrow \mathcal{TN} \cong_i^I \mathcal{TN}'$, согласно утверждению 5, то $\mathcal{TN} \tilde{R} \mathcal{TN}' \not\cong \mathcal{TN} R \mathcal{TN}'$. □

6. Заключение

В данной работе было показано, что выбор между промежуточной и устойчиво атомарной стратегиями сброса часов оказывает большое влияние на эквивалентность НВСП_{сл}. При исследовании рассматривались эквивалентности в двух дихотомиях: «интерливинг — истинный параллелизм» и «линейное — ветвящееся время». Для первой дихотомии ис-

Рис. 9: Непрерывно-временные сети Петри \mathcal{TN}_{11} и \mathcal{TN}_{12}

следовались интерливинговая и процессно-сетевая семантика, в то время как для второй дихотомии использовались языковая, обычная бисимуляционная и сохраняющая историю бисимуляционная семантики. Относительно каждой из стратегий сброса часов интерливинговая языковая эквивалентность является наиболее слабой, а процессно-сетевая сохраняющая историю бисимуляционная эквивалентность выступает как наиболее сильная. Основанные на данном факте примеры показали, что из произвольной эквивалентности двух $\text{НВСП}_{\text{сл}}$ относительно одной из стратегий сброса часов не будет следовать ни одна из рассмотренных эквивалентностей тех же $\text{НВСП}_{\text{сл}}$ относительно другой стратегии. Однако, был найден подкласс $\text{НВСП}_{\text{сл}}$, для которых поведение будет схожим независимо от выбранной стратегии. Исключение из структуры $\text{НВСП}_{\text{сл}}$ петель, т.е. переходов, множество входных и выходных мест которых пересекается, ведет к совпадению множеств пробегов из начального состояния относительно обеих стратегий сброса часов. Кроме того, было доказано, что в этом случае множество временных процессов при смене стратегий также остается одинаковым. Это приводит к совпадению эквивалентностей $\text{НВСП}_{\text{сл}}$ относительно промежуточной и устойчиво атомарной стратегий.

В качестве дальнейшей работы планируется разработка и исследование «истинно-параллельных» семантик и эквивалентностей в терминах реверсивных сетей Петри [5] и их временных расширений, позволяющих моделировать вычисления как в прямом, так и в обратном направлениях.

Список литературы

1. Зубарев, А. Ю. Сравнение языковых и бисимуляционных эквивалентностей непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией / А. Ю. Зубарев // Проблемы информатики. — 2022. — № 4. — С. 5–27.

2. Зубарев, А. Ю. Иерархия эквивалентностей непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией / А. Ю. Зубарев // Проблемы информатики. — 2024. — № 1. С. 5–40.
3. Тарасюк, И. В. Эквивалентности для поведенческого анализа параллельных и распределенных вычислительных систем / И. В. Тарасюк. — Новосибирск : Академическое издательство “Гео”, 2007.
4. Aura, T. A causal semantics for time Petri nets / T. Aura, J. Lilius // Theoretical Computer Science. — 2000. — Vol. 243, no. 1/2. — P. 409–447.
5. Barylska, K. Reversing Transitions in Bounded Petri Nets / K. Barylska, E. Erofeev, M. Koutny L. Mikulski, M. Piatkowski // Fundamenta Informaticae. — 2018. — Vol. 157 — P. 341–357.
6. Be’rard, B. Comparison of the expressiveness of timed automata and time Petri nets / B. Be’rard // Formal Modeling and Analysis of Timed Systems – FORMATS 2005 / ed. by P. Petterson, W. Yi. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2005. — P. 211–225.
7. Boyer, M. Comparison of the Expressiveness of Arc, Place and Transition Time Petri Nets / M. Boyer, O. Roux // Petri Nets and Other Models of Concurrency – ICATPN 2007 / ed. by J. Kleijn, A. Yakovlev. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. — P. 63–82
8. Reynier, P.-A. Weak time Petri nets strike back! / P.-A. Reynier, A. Sangnier // CONCUR 2009 – Concurrency Theory / ed. by M. Bravetti, G. Zavattaro. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. — P. 557–571.
9. Virbitskaite, I. True concurrent equivalences in time Petri nets / I. Virbitskaite, D. Bushin, E. Best // Fundamenta Informaticae. — 2016. — Vol. 149, no. 4. — P. 401–418.
10. Virbitskaite, I. B. ‘True Concurrency’ Semantics for Time Petri Nets with Weak Time and Persistent Atomic Policies / I. B. Virbitskaite, A. Y. Zubarev // Programming and Computer Software. — 2021. — Vol. 47, no. 5. — P. 389–401.
11. Zubarev, A. State space reduction for time Petri nets with weak semantics / A. Zubarev // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Computer Science. — 2019. — No. 43. — P. 39–52.