

УДК 519.681.2, 519.681.3

Тестовые эквивалентности с обратимостью для временных сетей Петри

Боженкова Е.Н. (Институт систем информатики СО РАН)

В статье определяется и исследуется семейство тестовых эквивалентностей в контексте непрерывно-временных безопасных сетей Петри (ВСП) с возможностью отмены (обратимости) выполненных действий. Тестовые эквивалентности рассматриваются в интерливинговой и шаговой семантиках, семантике частичного порядка и комбинации этих семантик. Для представления вычислений ВСП используется частично-упорядоченная семантика временных причинных сетей-процессов. Обратимость действий рассматривается как возможность отмены в вычислении одиночных или параллельных действий, максимальных в данном вычислении относительно отношения причинной зависимости. В статье устанавливается иерархия взаимосвязей между рассматриваемыми эквивалентностями.

Ключевые слова: временные сети Петри, тестовые эквивалентности, отмена действий, обратимые вычисления

1. Введение

При моделировании и изучении поведения вычислительных процессов было введено значительное количество поведенческих эквивалентностей. При этом также активно исследовались и взаимосвязи эквивалентностей в разных семантиках от интерливинговой до семантик частичного порядка (см., например, классический обзор Р. ван Глаббека [34]). При интерливинговом подходе невозможно различить процессы с параллельным и последовательным поведением. Для увеличения мощности эквивалентностей были введены шаговая семантика, в которой сравнение поведения происходит относительно выполнения множества независимых действий, и семантика частичного порядка, при которой в качестве подпроцессов выполнения берутся уже частично-упорядоченные множества.

В множестве известных подходов к определению понятия эквивалентности, от трассовой до бисимуляционной, большой подкласс занимают тестовые эквивалентности. Понятие тестовой эквивалентности параллельных процессов было предложено М. Хеннесси и Р. де Николой в статье [15]. Тест — это специальный процесс, который выполняется

параллельно с тестируемым процессом. Такое выполнение считается успешным, если тест достигает выделенного успешного состояния, и процесс проходит тест, если каждое его совместное выполнение с процессом является успешным. Два процесса считаются тестово эквивалентными, если они проходят одни и те же наборы тестов. Для облегчения применения тестовой эквивалентности обычно используются определения на основе найденных альтернативных характеристик, в одном из наиболее распространенных определений тест состоит из процесса-эксперимента и допустимого множества возможных его продолжений вместо единственного действия ([4, 11]). Так, альтернативные характеристики временных тестовых эквивалентностей с использованием понятия допустимых множеств в работах [12] и [23] были даны для систем переходов с дискретным временем, в [5] — для непрерывно-временных структур событий. Другой подход к альтернативной характеристике был предложен в статьях [19] и [13], в них авторы нашли характеристики тестовых предпорядков для алгебр процессов с временными ограничениями через трассы отказов.

Для модели сетей Петри интерливинговые тестовые отношения были исследованы в работе [9], в которой кроме альтернативной характеристики получены результаты по дискретизации временных характеристик модели, сопоставленных фишкам и дугам.

Для представления семантики частичного порядка в модели сетей Петри обычно используются причинные сети-процессы ([20, 28, 35]), в которых выполнениям переходов соответствуют события, разметке — условия, частичный порядок моделируется отношениями причинной зависимости и параллелизма. Сравнение разновидностей тестовой эквивалентности в частично-упорядоченной семантике сетей Петри было проведено в статье [32].

Для сетей Петри с временными характеристиками частично-упорядоченная семантика была предложена для дискретно-временных сетей Петри в работах [2, 33], где время в модель введено как длительность срабатывания перехода; для непрерывно-временных безопасных сетей Петри (ВСП) — в работе [6], где переходам сопоставлены интервалы временных задержек их срабатывания. В работе [8] сравнение моделей временных автоматов и временных сетей Петри проведено с использованием интерливинговой трассовой и бисимуляционной эквивалентностями.

Иерархия трассовых и бисимуляционных эквивалентностей в частично-упорядоченной семантике ВСП изучалась в работе [37]. Для этой же модели исследования тестовых

эквивалентностей в семантиках причинных сетей-процессов и причинных деревьев проведены в работах [1, 10], при этом установлено совпадение данных семантик в контексте тестовых эквивалентностей.

Для увеличения выразительной мощности в вычислительные модели стали вводить возможность отменить выполнение некоторых действий. Такие модели с обратимостью нашли применение в моделировании биохимических реакций, отладке микропроцессоров и программных систем. В ходе исследований выделилось три основных способа введения отмены действий: обратный ход; причинная обратимость и произвольная обратимость. Метод обратного хода подразумевает, что отмена действий производится в том же порядке, в котором действия происходили (см., например, [14]). При отмене действий в методе причинной обратимости выбор происходит среди максимальных действий в текущем вычислении, т.е. действия, для которых они являются необходимыми предшественниками, уже отменены или еще не были совершены (см. [24]). Такой метод используется для моделирования систем, протоколов, при отладке программ ([21, 22, 36]). При методе произвольной обратимости, правила отмены действий задаются в самой модели (см., например, [3, 25, 31]). Расширение таких вычислительных моделей как сети Петри и структуры событий возможностью отмены действий и их взаимосвязи исследовались для разных подходов к обратимости. Так в [24] найдено соответствие между подклассом обратимых первичных структур событий с причинной обратимостью и обратимыми О-сетями. В [25] предложен подкласс сетей Петри, в котором реализована произвольная обратимость, и для него установлено соответствие с произвольно-обратимыми структурами событий. Среди других исследований проводились поиски способов построения сетей с обратимостью из обычных (см., например, [7, 24]).

Для моделей с обратимыми вычислениями также изучаются и поведенческие эквивалентности. Иерархия эквивалентностей с причинной обратимостью в интерливинговой, шаговой семантиках, семантиках частичного порядка и сохраняющих историю исследована И.Филипсом и И.Улидовски для стабильных структур конфигураций с причинной обратимостью в работе [29]. Авторами установлено, что бисимуляции с обратимостью сильнее обычных бисимулиций, так интерливинговая бисимуляция с интерливинговой обратимостью сильнее сохраняющей историю бисимуляции без обратимости. Эти же авторы ввели логику EIL в работе [30], расширив логику HML ([18]) модальностями обратимости, что позволило дать логическую характеристику подклассу сохраняющих

историю бисимуляций.

Отметим, что исследования эквивалентностей с учетом прошлого поведения делались и без введения в модель отмены действий. Например, в [16] подход к исследованию прошлого вычислений совпадает с методом обратного хода, интерливинговые (back-forth) бисимуляции определены на последовательностях вычислений. При таком определении бисимуляции введение обратимости не привнесло дополнительных возможностей, т.е. они оказались слабее бисимуляций с причинной обратимостью из [29]. В работе [27] исследовалась δ -бисимуляция на путях с использованием максимальных независимых элементов, что дало некоторое усиление, но такой подход отличается от причинной обратимости и слабее нее.

Цель данной работы — изучить тестовые эквивалентности с возможностью отмены выполненных действий в контексте безопасных ВСП, в которых переходы помечены временными интервалами и каждый переход, имеющий достаточное количество фишек во входных местах, должен срабатывать в момент времени, когда значение его счетчика принадлежит его временному интервалу.

Для представления вычислений ВСП используется частично-упорядоченная семантика причинных сетей-процессов. Тестовые эквивалентности для обычных прямых вычислений рассматриваются в семантиках от интерливинга до семантики частичного порядка, а обратимость действий рассматривается как прошлое вычислений с точки зрения причинной обратимости в интерливинговой и шаговых семантиках. Материал статьи разбит на части следующим образом. В первых двух главах будут рассмотрены основные определения ВСП и причинных сетей-процессов. Далее, в гл. 4, будут введены понятия обратимости действий. Гл. 5 посвящена определению тестовых эквивалентностей в разных семантиках с обратимостью. В гл. 6 будут исследованы взаимосвязи тестовых эквивалентностей. Заключительные замечания будут приведены в гл.7.

2. Временные сети Петри: синтаксис и шаговая семантика

В этой главе рассмотрим базовую терминологию непрерывно-временных сетей Петри и их шаговую семантику. Сначала напомним определения структуры и поведения сетей Петри. Пусть Act — множество действий.

Определение 1. (*Помеченная над Act сеть Петри* (СП) — это набор $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$, где P — конечное множество мест, T — конечное множество переходов ($P \cap T = \emptyset$

и $P \cup T \neq \emptyset$), $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — отношение инцидентности, $\emptyset \neq M_0 \subseteq P$ — начальная разметка, $L : T \rightarrow Act$ — помечающая функция. Для элемента $x \in P \cup T$ определим множество $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$ входных и множество $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$ выходных элементов, которые для подмножества $X \subseteq P \cup T$ элементов обобщаются соответственно до множеств $\bullet X = \bigcup_{x \in X} \bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$.

Разметка M СП $\mathcal{N}$ — это произвольное подмножество P . Переход $t \in T$ *готов сработать* при разметке M , если $\bullet t \subseteq M$. Обозначим через $En(M)$ множество всех переходов, готовых сработать при разметке M .

Непустое множество переходов $\emptyset \neq U \subseteq T$ называется *шагом, готовым сработать при разметке M* , если $\forall t \in U \diamond t \in En(M)$ и $(\forall t \neq t' \in U : \bullet t \cap \bullet t' = t^\bullet \cap t'^\bullet = \emptyset^1)$. Если шаг U готов сработать при разметке M , то его срабатывание приводит к новой разметке $M' = (M \setminus \bullet U) \cup U^\bullet$ (обозначается $M \xrightarrow{U} M'$).

Под непрерывно-временной сети Петри (ВСП) [6] понимается СП, в которой с каждым переходом связан временной интервал, указывающий возможные временные моменты срабатывания перехода, готового по наличию фишек в его входных местах; готовый переход может сработать, только когда достигнута нижняя граница и не превышена верхняя граница его интервала, и, если он еще не сработал, то обязан сработать, когда достигнута верхняя граница его интервала.

Область $\mathbb{T}$ временных значений — множество неотрицательных рациональных чисел. Считаем, что $[\tau_1, \tau_2]$ — замкнутый интервал между двумя временными значениями $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{T}$. Также, бесконечность может появляться как правая граница в открытых справа интервалах. Пусть $Interv$ — множество всех таких интервалов.

Определение 2. (Помеченная над Act) *временная сеть Петри* (ВСП) — это пара $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$, где $\mathcal{N}$ — (помеченная над Act) базовая сеть Петри и $D : T \rightarrow Interv$ — статическая временная функция, сопоставляющая каждому переходу временной интервал. Границы временного интервала $D(t) \in Interv$ называются ранним (Eft) и поздним (Lft) временами срабатывания перехода $t \in T$.

Состояние ВСП $\mathcal{TN}$ — это пара $S = (M, I)$, где M — разметка СП $\mathcal{N}$ и $I : En(M) \rightarrow \mathbb{T}$ — динамическая временная функция. Начальное состояние ВСП $\mathcal{TN}$ — это пара $S_0 = (M_0, I_0)$, где M_0 — начальная разметка СП $\mathcal{N}$ и $I_0(t) = 0$ для всех $t \in En(M_0)$.

¹Для удобства последующего определения временных сетей Петри требование $M \cap U^\bullet = \emptyset$, необходимое для обеспечения безопасности сети, будет введено в определении свойства свободы от контактов.

Шаг U , готовый сработать при разметке M , *готов сработать в состоянии* $S = (M, I)$ в *относительный момент времени* $\theta \in \mathbb{T}$, если $(Eft(t) \leq I(t) + \theta)$ для всех $t \in U$ и $(I(t') + \theta \leq Lft(t'))$ для всех $t' \in En(M)$. Срабатывание шага U приводит к новому состоянию $S' = (M', I')$ (обозначается $S \xrightarrow{(U, \theta)} S'$), при этом $M \xrightarrow{U} M'$ и $\forall t' \in T$.

$$I'(t') = \begin{cases} I(t') + \theta, & \text{если } t' \in En(M \setminus \bullet U), \\ 0, & \text{если } t' \in En(M') \setminus En(M \setminus \bullet U), \\ \text{не определено,} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Будем писать $S \xrightarrow{(A, \theta)} S'$ для $A = L(U) = \sum_{t \in U} L(t) \in Act^{\mathbb{N}}$, т.е. A является мультимножеством над $\{a \in Act \mid a = L(t) \text{ и } t \in U\}$. Также будем использовать запись $S_0 \xrightarrow{\sigma} S'$, если $\sigma = (U_1, \theta_1) \dots (U_k, \theta_k)$ и $S_0 \xrightarrow{(U_1, \theta_1)} S^1 \dots S^{k-1} \xrightarrow{(U_k, \theta_k)} S^k = S'$ ($k \geq 0$). Тогда σ называется *последовательностью срабатываний в $\mathcal{TN}$ из S_0 (в S')*, а S' — *достижимым состоянием $\mathcal{TN}$ из S_0* . Множество всех последовательностей срабатываний в $\mathcal{TN}$ из S_0 обозначим $\mathcal{FS}_s(\mathcal{TN})$ и множество достижимых состояний $\mathcal{TN}$ из S_0 — $RS(\mathcal{TN})$. Для $\sigma = (U_1, \theta_1) \dots (U_k, \theta_k)$ $L(\sigma) = (A_1, \theta_1) \dots (A_k, \theta_k)$, если $A_i = L(U_i)$ для всех $1 \leq i \leq k$.

Если $|U_i| = 1$ для всех $1 \leq i \leq k$, т.е. $\sigma = (t_1, \theta_1) \dots (t_k, \theta_k)$, то σ будем называть *интерливинговой последовательностью срабатываний*. Подмножество таких последовательностей в $\mathcal{FS}_s(\mathcal{TN})$ будем обозначать $\mathcal{FS}_i(\mathcal{TN})$. Для интерливинговых последовательностей срабатываний $L(\sigma) = (a_1, \theta_1) \dots (a_k, \theta_k)$, если $a_i = L(t_i)$ для всех $1 \leq i \leq k$.

ВСП $\mathcal{TN}$ называется *T -ограниченной*, если $\bullet t \neq \emptyset \neq t^\bullet$ для всех переходов $t \in T$; *свободной от контактов*, если для любого состояния $S \in RS(\mathcal{TN})$ и любого шага U , готового сработать в состоянии S в относительный момент времени θ верно: $(M \setminus \bullet U) \cap U^\bullet = \emptyset$; *прогрессирующей по времени*, если для любой последовательности переходов $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq T$ такой, что $t_i^\bullet \cap^\bullet t_{i+1} \neq \emptyset$ ($1 \leq i < n$) и $t_n^\bullet \cap^\bullet t_1 \neq \emptyset$, выполняется неравенство $\sum_{1 \leq i \leq n} Eft(t_i) > 0$. В дальнейшем будем рассматривать только T -ограниченные, свободные от контактов и прогрессирующие по времени ВСП.

Пример 1. Пример помеченной над $Act = \{a, b, c, d\}$ ВСП $\mathcal{TN}$ показан на рис. 1, где места представлены окружностями, переходы — барьерами; рядом с элементами ВСП размещены их имена; между элементами, включенными в отношение инцидентности, изображены стрелки; каждое место, входящее в начальную разметку, отмечено наличием в нем фишки (жирной точки); значения помечающей и статической временной функций указаны рядом с переходами. Нетрудно проверить, что шаг $U = \{t_1, t_3\}$ готов сработать при начальной разметке $M_0 = \{p_1, p_2\}$, а также готов сработать в начальном состоянии

$S_0 = (M_0, I_0)$, где $I_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \{t_1, t_3\}, \\ \text{не определено иначе,} & \end{cases}$ в относительный момент времени $\theta \in [2, 3]$. При этом, $\sigma = (U, 3) (t_2, 2) (U, 2) (\{t_5, t_4\}, 2)$ — последовательность срабатываний из S_0 в ВСП $\mathcal{TN}$, $L(\sigma) = ([b : 2], 3)(a, 2)([b : 2], 3)([d : 1, c : 1], 2)$. Кроме того, $\mathcal{TN}$ является T -ограниченной, свободной от контактов и прогрессирующей по времени. $\square$

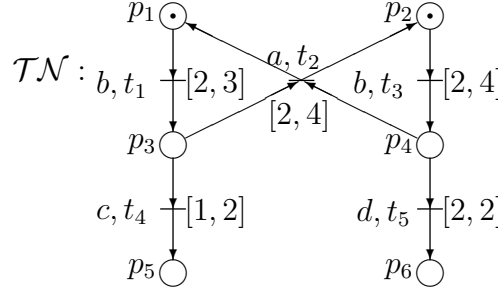


Рис. 1. Пример временной сети Петри.

3. Причинно-зависимые семантики временных сетей Петри

3.1. Временные сети

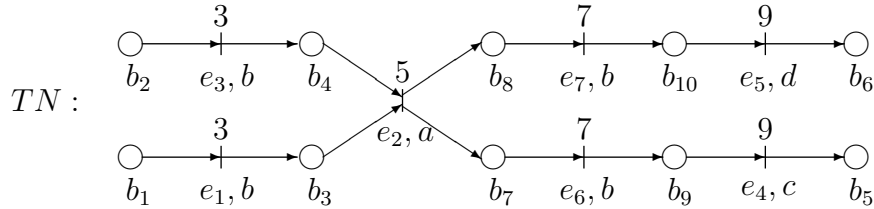


Рис. 2. Пример временной причинной сети.

Для анализа поведения ВСП используется семантика временных причинных сетей-процессов. Прежде чем перейти к рассмотрению данной семантики напомним базовые определения и обозначения, связанные с временными сетями.

Определение 3. (Помеченной над Act) временной сетью называется конечная, ациклическая сеть $TN = (B, E, G, l, \tau)$, где B — множество условий, E — множество событий, $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ — отношение инцидентности (причинной зависимости TN) такое, что $\{e \mid \exists b \in B (e, b) \in G\} = \{e \mid \exists b \in B (b, e) \in G\} = E$, $l : E \rightarrow Act$ — помечающая функция и $\tau : E \rightarrow \mathbb{T}$ — временная функция такая, что $(e, e') \in G^+ \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$, т.е. событие не может произойти раньше своих предшественников относительно причинной зависимости TN .

В дальнейшем будут полезны следующие обозначения для временной сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$. Пусть $\prec = G^+$, $\preceq = G^*$ и $\tau(TN) = \max\{\tau(e) \mid e \in E\}$. Определим множества: $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in G\}$ и $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in G\}$ для $x \in B \cup E$; $\bullet X = \bigcup_{x \in X} \bullet x$ и $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$ для $X \subseteq B \cup E$; $\bullet TN = \{b \in B \mid \bullet b = \emptyset\}$ и $TN^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$.

$TN = (B, E, G, l, \tau)$ называется (помеченной над Act) временной причинной сетью, если $|\bullet b| \leq 1$ и $|b^\bullet| \leq 1$ для всех условий $b \in B$.

Введем дополнительные определения и обозначения для временной причинной сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$:

- $\downarrow e = \{x \mid x \preceq e\}$ — множество предшественников события $e \in E$, $Earlier(e) = \{e' \in E \mid \tau(e') < \tau(e)\}$ — множество временных предшественников события $e \in E$;
- $E' \subseteq E$ — левозамкнутое подмножество E , если $\downarrow e' \cap E \subseteq E'$ для каждого $e' \in E'$. Для такого подмножества будем использовать обозначение $Cut(E') = (E'^\bullet \cup \bullet TN) \setminus \bullet E'$. $E' \subseteq E$ — непротиворечивое по времени подмножество E , если $\tau(e') \leq \tau(e)$ для всех $e' \in E'$ и $e \in E \setminus E'$;
- $e \smile e' \iff \neg((e \prec e') \vee (e' \prec e))$. Множество $\emptyset \neq V \subseteq E$ называется шагом, если $e \smile e'$ и $\tau(e) = \tau(e')$ для всех пар $e \neq e' \in V$. Обозначим $\downarrow V = \{\downarrow e \subseteq E \mid e \in V\}$ множество предшественников V и $\tau(V) = \tau(e)$ для произвольного $e \in V$ — время V . Тогда шаг V является предшественником шага V' ($V \prec V'$), если выполняется $(\downarrow V' \cap V \neq \emptyset) \wedge (V' \cap \downarrow V = \emptyset)$; $V \smile V' \iff (\downarrow V \cap V' = \emptyset) \wedge (V \cap \downarrow V' = \emptyset)$.
- последовательность шагов $\rho = V_1 \dots V_k$ ($k \geq 0$) — s -линеаризация TN , если $\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i = E$, $\sum_{1 \leq i \leq k} |V_i| = |E|$ и для всех V_i, V_j ($1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$) выполняются условия: $((V_i \smile V_j) \vee (V_i \prec V_j) \vee (V_i \prec V_j))$ и $((V_i \prec V_j \vee \tau(V_i) < \tau(V_j)) \Rightarrow i < j)$. Очевидно, $\tau(V_k) = \tau(TN)$.
- s -линеаризация TN $\rho = V_1 \dots V_k$ ($k \geq 0$) — будет i -линеаризацией TN , если для всех $1 \leq i \leq k$ $|V_i| = 1$, т.е. $\rho = e_1 \dots e_k$.

Заметим, что $\eta(TN) = (E_{TN}, \preceq_{TN} \cap (E_{TN} \times E_{TN}), l_{TN}, \tau_{TN})$ является (помеченным над Act) временным частично-упорядоченным множеством (ВЧУМ)².

Обозначим через $\mathcal{TP}(Act)$ множество всех ВЧУМов, помеченных над Act , $\mathcal{TP}_e(Act) = \{\eta \in \mathcal{TP}(Act) \mid |X_\eta| = 1\}$ — подмножество ВЧУМов, состоящих из одного элемента.

²(Помеченный над Act) ВЧУМ — это набор $\eta = (X, \preceq, \lambda, \tau)$, состоящий из конечного множества элементов X ; рефлексивного, антисимметричного и транзитивного отношения $\preceq$; помечающей функции $\lambda : X \rightarrow Act$ и временной функции $\tau : X \rightarrow \mathbb{T}$ такой, что $e \preceq e' \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$. Пусть $\tau(\eta) = \max\{\tau(x) \mid x \in X\}$.

Для двух ВЧУМов $\eta = (E, \preceq, l, \tau)$ и $\eta' = (E', \preceq', l', \tau') \in \mathcal{TP}(Act)$ и $\star, \star \in \{i, s, p\}$ введем дополнительные обозначения: η' является $\star$ -расширением η ($\eta \sqsubset_{\star} \eta'$), если E — левозамкнутое и непротиворечивое по времени подмножество E' , $\preceq = \preceq' \cap (E \times E)$, $l = l' \upharpoonright_E$; если $\star = i$, то должно выполняться дополнительное требование $|E' \setminus E| = 1$, и если $\star = s$, то для любой пары $e \neq e' \in E' \setminus E$ должно выполняться $e \smile e'$. Тогда для отношения $\sqsubset_{\star-\star} = (\sqsubset_{\star} \cup \sqsubset_{\star}^{-1})$ η' является $\star - \star$ -расширением η . Обозначим через $\mathcal{TP}_{\star-\star}^{\sqsubset}(Act) = \{P_1 P_2 \dots P_k, 0 \leq k \mid P_j \in \mathcal{TP}(Act) (1 \leq j \leq k), P_j \sqsubset_{\star-\star} P_{j+1}, 1 \leq j < k\}$ множество последовательностей ВЧУМов, в которых соседние ВЧУМы являются $\star - \star$ -расширениями.

Временные причинные сети $TN = (B, E, G, l, \tau)$ и $TN' = (B', E', G', l', \tau')$ изоморфны (обозначается $TN \simeq TN'$), если существует биективное отображение $\beta : B \cup E \rightarrow B' \cup E'$ такое, что: (а) $\beta(B) = B'$ и $\beta(E) = E'$; (б) $x G y \iff \beta(x) G' \beta(y)$ для всех $x, y \in B \cup E$; (в) $l(e) = l'(\beta(e))$ и $\tau(e) = \tau'(\beta(e))$ для всех $e \in E$. Кроме того, будем говорить, что для $\star \in \{i, s, p\}$ TN' является $\star$ -расширением TN (обозначается $TN \longrightarrow_{\star} TN'$), если $\eta(TN')$ является $\star$ -расширением $\eta(TN)$, $B \subseteq B'$ и $G = G' \cap (B \times E \cup E \times B)$.

Пример 2. На рис. 2 показана временная причинная сеть $TN = (B, E, G, l, \tau)$, где условия представлены окружностями, а события — барьерами; рядом с элементами сети размещены их имена; между элементами, включенными в отношение инцидентности, изображены стрелки; значения функций l и τ указаны рядом с событиями. Определим временные причинные сети $TN' = (B', E', G', l', \tau')$, где $B' = \{b_1, b_2\}$, $E' = \emptyset$, $G' = \emptyset$, $l' = \emptyset$, $\tau' = \emptyset$ и $TN'' = (B'', E'', G'', l'', \tau'')$, где $B'' = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $E'' = \{e_1, e_3\}$, $G'' = G \cap (B'' \times E'' \cup E'' \times B'')$, $l'' = l \upharpoonright_{E''}$, $\tau'' = \tau \upharpoonright_{E''}$. Легко проверить, что TN'' является s -расширением TN' . $\square$

3.2. Временные причинные сети-процессы временных сетей

Петри

В этом разделе рассмотрим понятие временных причинных сетей-процессов ВСП, предложенное в статье [6], и использованное при исследовании временных тестовых эквивалентностей в работах [1, 10].

Определение 4. Пусть $\mathcal{TN} = ((P, T, F, M_0, L), D)$ — ВСП и $TN = (B, E, G, l, \tau)$ — временная причинная сеть. Отображение $\varphi : B \cup E \rightarrow P \cup T$ называется *гомоморфизмом* из TN в $\mathcal{TN}$, если выполняются следующие условия:

- $\varphi(B) \subseteq P, \varphi(E) \subseteq T$;
- ограничение φ на $\bullet e$ является биекцией между $\bullet e$ и $\bullet \varphi(e)$ и ограничение φ на $e^\bullet$ является биекцией между $e^\bullet$ и $\varphi(e)^\bullet$ для всех $e \in E$;
- ограничение φ на $\bullet TN$ является биекцией между $\bullet TN$ и M_0 ;
- $l(e) = L(\varphi(e))$ для всех $e \in E$.

Пара $\pi = (TN, \varphi)$ называется *временным причинным сетью-процессом ВСП $\mathcal{TN}$* , если TN — временная причинная сеть и φ — гомоморфизм из TN в $\mathcal{TN}$.

Пусть $\pi = (TN, \varphi)$ — временной причинный сеть-процесс ВСП $\mathcal{TN}$, $B' \subseteq B_{TN}$ и $t \in En(\varphi(B'))$. Тогда глобальный момент времени, когда фишки появляются во всех входных местах перехода t , определяется следующим образом: $\mathbf{TOE}_\pi(B', t) = \max \left(\{ \tau_{TN}(\bullet b) \mid b \in B'_{[t]} \setminus \bullet TN \} \cup \{0\} \right)$, где $B'_{[t]} = \{b \in B' \mid \varphi_{TN}(b) \in \bullet t\}$.

Для того, чтобы значения временных функций временных причинных сетей-процессов ВСП соответствовали временным интервалам срабатывания сетевых переходов, вводится понятие корректных временных причинных сетей-процессов ВСП.

Определение 5. Временной причинный сеть-процесс $\pi = (TN, \varphi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ называется *корректным*, если для каждого $e \in E$ выполняются следующие условия:

- $\tau(e) \geq \mathbf{TOE}_\pi(\bullet e, \varphi(e)) + Eft(\varphi(e))$,
- $\forall t \in En(\varphi(C_e)) \diamond \tau(e) \leq \mathbf{TOE}_\pi(C_e, t) + Lft(t)$, где $C_e = Cut(Earlier(e))$.

Пусть $\mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ — множество корректных временных причинных сетей-процессов ВСП $\mathcal{TN}$, а $\pi_0 = (TN_0 = (B_0, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset), \varphi_0) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ с $\varphi_0(B_0) = M_0$ — начальный временной причинный сеть-процесс ВСП $\mathcal{TN}$.

Через $\mathcal{TPos}(\mathcal{TN}) = \{TP \mid \exists \pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}): TP \simeq^3 \eta(TN)\}$ обозначим множество ВЧУМов, изоморфных ВЧУМам, полученным из корректных временных причинных сетей-процессов ВСП $\mathcal{TN}$.

Пример 3. Определим отображение φ из временной причинной сети TN (см. рис. 2) в ВСП $\mathcal{TN}$ (см. рис. 1) следующим образом: $\varphi(b_i) = p_i$ ($1 \leq i \leq 6$), $\varphi(b_i) = p_{i-6}$ ($7 \leq i \leq 10$) и $\varphi(e_i) = t_i$ ($1 \leq i \leq 5$), $\varphi(e_6) = t_1$, $\varphi(e_7) = t_3$. Легко видеть, что $\pi = (TN, \varphi)$ является корректным временным причинным сетью-процессом ВСП $\mathcal{TN}$. $\square$

Будем говорить, что $\pi = (TN, \varphi)$ и $\pi' = (TN', \varphi')$ из $\mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ *изоморфны* (обозначается $\pi \simeq \pi'$), если существует изоморфизм $f : TN \simeq TN'$ такой, что $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$ для всех

³ Два ВЧУМ $\eta = (X, \preceq, \lambda, \tau)$ и $\eta' = (X', \preceq', \lambda', \tau')$ изоморфны (обозначается $\eta \simeq \eta'$), если существует биекция $\beta : X \rightarrow X'$ такая, что (а) $x \preceq y \iff \beta(x) \preceq' \beta(y)$ для всех $x, y \in X$; (б) $\lambda(x) = \lambda'(\beta(x))$ и $\tau(x) = \tau'(\beta(x))$ для всех $x \in X$.

$x \in B \cup E$; π' является $*$ -расширением π в $\mathcal{TN}$, (обозначается $\pi \longrightarrow_* \pi'$) ($*$ $\in \{i, s, p\}$), если $TN \longrightarrow_* TN'$ и $\varphi = \varphi'|_{B \cup E}$.

В дальнейшем понадобятся дополнительные обозначения для расширений временных причинных сетей-процессов. Для $\pi, \pi' \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ будем писать:

- $\pi \xrightarrow{(a, \theta)}_i \pi'$, если π' является i -расширением π и $\{e\} = E' \setminus E$, $l_{\pi'}(e) = a$, $\tau_{\pi'}(e) = \theta$;
- $\pi \xrightarrow{(A, \theta)}_s \pi'$, если π' является s -расширением и $E' \setminus E$ является шагом в π' , $A = L(\varphi(E' \setminus E))$ и $\theta = \tau(E' \setminus E)$;
- $\pi \xrightarrow{P}_p \pi'$, если π' является p -расширением π и ВЧУМ $P \sim \eta(\pi') \setminus \eta(\pi)$.

Для $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ определим функцию FS_π , которая отображает s -линеаризацию $\rho = V_1 \dots V_k TN$ в последовательность вида: $FS_\pi(\rho) = (\varphi(V_1), \tau(V_1) - 0) \dots (\varphi(V_k), \tau(V_k) - \tau(V_{k-1}))$.

Следующие утверждение и лемма являются обобщениями результатов из [1] (Утверждение 1 и Лемма 2), которые устанавливают взаимосвязи между последовательностями срабатываний и корректными временными причинными сетями-процессами ВСП,

Утверждение 1. Пусть $\mathcal{TN}$ — ВСП. Тогда

- (а) если $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и ρ — $s(i)$ -линеаризация TN , то существует единственная последовательность срабатываний $FS_\pi(\rho) \in \mathcal{FS}_{s(i)}(\mathcal{TN})$;
- (б) если $\sigma \in \mathcal{FS}_{s(i)}(\mathcal{TN})$, то существует единственный (с точностью до изоморфизма) временной причинный сеть-процесс $\pi_\sigma = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и единственная $s(i)$ -линеаризация $\rho_\sigma TN$ такие, что $FS_{\pi_\sigma}(\rho_\sigma) = \sigma$.

Лемма 1. Пусть $\sigma \in \mathcal{FS}_{s(i)}(\mathcal{TN})$ и $\pi \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ такие, что $\sigma = FS_\pi(\rho)$, где ρ — $s(i)$ -линеаризация TN_π . Тогда

- (а) если $\sigma(U, \theta) \in \mathcal{FS}_{s(i)}(\mathcal{TN})$, то существует $\tilde{\pi} \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ такой, что $\pi \rightarrow_{s(i)} \tilde{\pi}$ в $\mathcal{TN}$ и $\sigma(U, \theta) = FS_{\tilde{\pi}}(\rho V)$, где ρV — $s(i)$ -линеаризация $TN_{\tilde{\pi}}$;
- (б) если $\pi \rightarrow_{s(i)} \tilde{\pi}$ в $\mathcal{TN}$, то существует $\sigma(U, \theta) \in \mathcal{FS}_{s(i)}(\mathcal{TN})$ такая, что $\sigma(U, \theta) = FS_{\tilde{\pi}}(\rho V)$, где ρV — $s(i)$ -линеаризация $TN_{\tilde{\pi}}$.

Пример 4. Для временного причинного сети-процесса $\pi = (TN, \varphi)$ ВСП $\mathcal{TN}$ (см. пример 3) и s -линеаризации $\rho = \{e_1, e_3\} \{e_2\} \{e_7, e_6\} \{e_5, e_4\}$ временной причинной сети TN получаем, что $FS_\pi(\rho) = (\{t_1, t_3\}, 3) (t_2, 2) (\{t_1, t_3\}, 2) (\{t_5, t_4\}, 2)$ является последовательностью срабатываний ВСП $\mathcal{TN}$ (см. пример 1). $\square$

4. Обратимые вычисления

При исследовании поведения вычислительных систем появилась необходимость отменять часть уже выполненных действий. При введении понятий тестовых эквивалентностей с учетом обратимых действий в дальнейшем будет использоваться подход причинной обратимости. Будем определять обратимые вычисления как вычисления в которых возможна отмена выполненного действия, если действие не является причиной для других действий процесса.

Введем обозначения для множества отменяемых действий $\overleftarrow{Act} = \{\overleftarrow{a} \mid a \in Act\}$, $\overleftarrow{Act} = \overleftarrow{Act} \cup Act$, при этом выполняется условие что $\overleftarrow{Act} \cap Act = \emptyset$, и биекцию $\llbracket \overleftarrow{\cdot} \rrbracket : Act \rightarrow \overleftarrow{Act}$, такую что $\llbracket \overleftarrow{\cdot} \rrbracket(a) = \overleftarrow{a}$.

Аналогичным образом вводятся обозначения для отменяемых ВЧУМов. $\overleftarrow{\mathcal{TP}}(Act) = \{\overleftarrow{P} \mid P \in \mathcal{TP}(Act)\}$; $\overleftarrow{\mathcal{TP}}_e(Act) = \{\overleftarrow{P} \mid P \in \mathcal{TP}_e(Act)\}$, $\overleftarrow{\mathcal{TP}}(Act) = \overleftarrow{\mathcal{TP}}(Act) \cup \mathcal{TP}(Act)$, и биекция $\llbracket \overleftarrow{\cdot} \rrbracket$ расширяется на $\mathcal{TP}(Act)$.

Через $\overleftarrow{a}$ и $\overleftarrow{P}$ будем обозначать элементы множеств $\overleftarrow{Act}$ и $\overleftarrow{\mathcal{TP}}(Act)$ соответственно.

Отметим, что отменяемые действия используются только в качестве обозначения действий для отмены, а не являются самостоятельными действиями. Отменяемое действие означает что для текущего процесса можно найти процесс, который может быть расширен до текущего, и расширение будет содержать событие, помеченное выбранным для отмены действием. Для простоты восприятия далее под $\overleftarrow{a}$ и $\overleftarrow{P}$ подразумеваются $\llbracket \overleftarrow{\cdot} \rrbracket(a)$ и $\llbracket \overleftarrow{\cdot} \rrbracket(P)$ для $a \in Act$, $P \in \mathcal{TP}(Act)$ соответственно.

Пусть $\pi = (TN, \varphi)$, $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$, $a \in Act$, $A \in Act^{\mathbb{N}}$, $\theta \in \mathbb{T}$, $P \in \mathcal{TP}(Act)$.

Введем обозначения для выполнения отмены действий и обратимых вычислений.

- Если $\pi' \xrightarrow{P}_p \pi$ ($\pi' \xrightarrow{(a, \theta)}_i \pi$, $\pi' \xrightarrow{(A, \theta)}_s \pi$), будем писать $\pi \xrightarrow{\overleftarrow{P}}_p \pi'$ ($\pi \xrightarrow{(\overleftarrow{a}, \theta)}_i \pi'$, $\pi \xrightarrow{(\overleftarrow{A}, \theta)}_s \pi'$),
- Для $\star, * \in \{i, s, p\}$ будем писать $\pi \xrightarrow{\overleftarrow{P}}_{\star-*} \pi'$, если $\pi \xrightarrow{P}_{\star} \pi'$ или $\pi' \xrightarrow{\overleftarrow{P}}_{\star} \pi$. Аналогичным образом определяются обозначения $\pi \xrightarrow{(\overleftarrow{a}, \theta)}_{i-i} \pi'$ и $\pi \xrightarrow{(\overleftarrow{A}, \theta)}_{s-s} \pi'$.

Если нет необходимости в уточнении или смысл понятен из контекста, символы $\overleftarrow{P}$ и/или $\star, *$ будут опускаться.

$$\text{Если } \pi \xrightarrow{\overleftarrow{P}} \pi', \text{ обозначим } E' \setminus E = \begin{cases} E' \setminus E, & \text{если } \pi \xrightarrow{P} \pi', \\ E \setminus E', & \text{если } \pi \xrightarrow{\overleftarrow{P}} \pi'. \end{cases}$$

Кроме того, введем обозначения для вычислений во временных сетях-процессах с сохранением истории. Пусть $TP = P_1 P_2 \dots P_k \in \mathcal{TP}_{\star-*}^{\square}(Act)$ при $\star, * \in \{i, s, p\}$, тогда $\pi \xrightarrow{TP}_{\star-*} \pi'$, если существуют $\pi_j \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ ($1 \leq j \leq k$) такие что $\pi_0 \xrightarrow{P_j} \pi_j$, $\pi' = \pi_k$ и $\pi_{j-1} \xrightarrow{\star-*} \pi_j$.

В дальнейшем, при определении тестовых эквивалентностей с обратимостью понадобятся обозначения отменяемых действий в последовательностях срабатываний в ВСП $\mathcal{TN}$. Для обратимых вычислений в корректных временных сетях-процессах введем связанные с ними обозначения для последовательностях срабатываний.

Пусть $\star, * \in \{i, s\}$. Если существуют $\pi_j \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}) (1 \leq j \leq k)$ такие, что $\pi_0 \xrightarrow{(A_1, \theta_1)} \pi_1 \xrightarrow{(\overleftarrow{A}_2, \theta_1)} \pi_2 \dots \pi_{k-1} \xrightarrow{(\overleftarrow{A}_k, \theta_k)} \pi_k$ обозначим $U_j = \varphi(E_j \backslash E_{j-1})$, где $E_l = E_{TN_{\pi_l}} (0 \leq l \leq k)$. Тогда последовательность $\overleftarrow{\sigma} = U_1 \overleftarrow{U}_2 \dots \overleftarrow{U}_k$ с $L(\overleftarrow{\sigma}) = A_1(\theta_1) \overleftarrow{A}_2(\theta_2) \dots \overleftarrow{A}_k(\theta_k)$ будем называть обратимой $\star - *$ -последовательностью срабатываний $\mathcal{TN}$.

Обозначим через $\mathcal{FS}_{\star-*}(\mathcal{TN})$ множество обратимых $\star - *$ -последовательностей срабатываний в ВСП $\mathcal{TN}$ из S_0 . Определим *обратимые* языки ВСП $\mathcal{TN}$, $\star, * \in \{i, s\}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\star-*}(\mathcal{TN}) = \{L(\overleftarrow{\sigma}) \mid \overleftarrow{\sigma} \in \mathcal{FS}_{\star-*}(\mathcal{TN})\};$$

$$\mathcal{TPom}_{i-p}(\mathcal{TN}) = \{\overleftarrow{P}_1 \overleftarrow{P}_2 \dots \overleftarrow{P}_k \mid 0 \leq k \mid P_j \in \mathcal{TP}(Act) \cup \overleftarrow{\mathcal{TP}}_e(Act) (1 \leq j < k), \exists \pi_j (1 \leq j \leq k) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}) \pi_l \xrightarrow{\overleftarrow{P}_l}_{i-p} \pi_{l+1}, 0 \leq l < k\};$$

$$\mathcal{TPos}_{i-p}(\mathcal{TN}) = \{TP = P_1 P_2 \dots P_k \in \mathcal{TP}_{i-p}^{\square}(Act) (0 \leq k) \mid P_j \in \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}), \exists \pi \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}) \pi_0 \xrightarrow{TP}_{i-p} \pi (1 \leq j \leq k)\}.$$

5. Тестовые эквивалентности

При интерливинговом и шаговом подходах к определению тестовой эквивалентности в качестве тестов рассматриваются последовательности w выполняемых действий или мультимножеств независимых действий (вычисления процесса) и множества W возможных дальнейших действий или шагов. Процесс проходит тест, если после выполнения каждой последовательности w дальше может выполняться хотя бы один из элементов из W . Два процесса тестово эквивалентны, если они проходят одно и то же множество тестов. Во временном варианте добавляется информация о временах выполнения действий. Для сравнения поведения процессов с обратимыми вычислениями в тестовые последовательности включаются отменяемые действия.

Определение 6. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ — ВСП, $\star, * \in \{i, s\}$. Для последовательности $w \in (Act^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T})^*$ ($w \in (\overleftarrow{Act}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T})^*$) и множества $W \subseteq Act^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}$, ($W \subseteq \overleftarrow{Act}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}$), $\mathcal{TN}$ **after** w **MUST** $_{\star-*} W$, если для любой $\sigma \in \mathcal{FS}_{\star-*}(\mathcal{TN})$ ($\overleftarrow{\sigma} \in \mathcal{FS}_{\star-*}(\mathcal{TN})$) такой, что $L(\sigma) = w$ ($L(\overleftarrow{\sigma}) = w$), существуют $(A, \theta) \in W$ и $\sigma(U, \theta) \in \mathcal{FS}_{\star-*}(\mathcal{TN})$ ($(\overleftarrow{A}, \theta) \in W$ и $\overleftarrow{\sigma}(\overleftarrow{U}, \theta) \in \mathcal{FS}_{\star-*}(\mathcal{TN})$) такие, что $L(\sigma(U, \theta)) = w (A, \theta)$ ($L(\overleftarrow{\sigma}(\overleftarrow{U}, \theta)) = w (\overleftarrow{A}, \theta)$).

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются $\star - (\star - \star)$ -тестово эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{\star} \mathcal{TN}'$ ($\mathcal{TN} \sim_{\star - \star} \mathcal{TN}'$)), если для любой последовательности $w \in (Act^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T})^*$ ($w \in (\overleftrightarrow{Act}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T})^*$) и любого множества $W \subseteq Act^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}$ ($W \subseteq \overleftrightarrow{Act}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}$), $\mathcal{TN} \text{ after } w \text{ MUST}_{\star(\star - \star)} W \iff \mathcal{TN}' \text{ after } w \text{ MUST}_{\star(\star - \star)} W$.

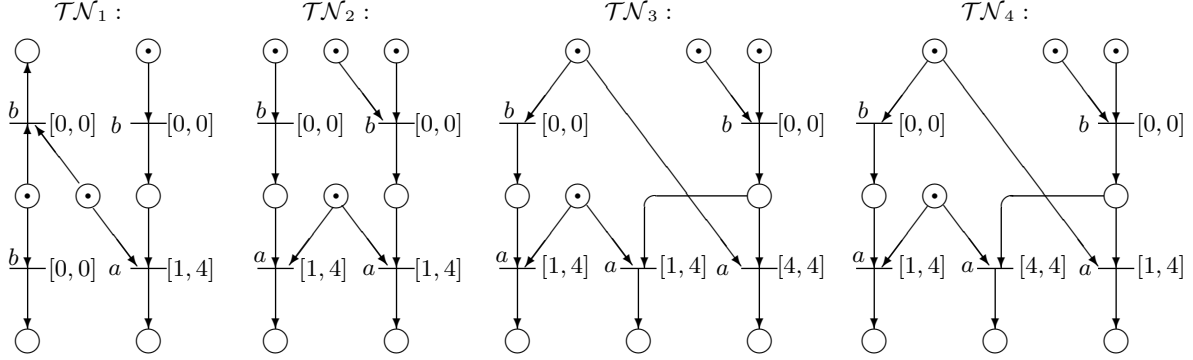
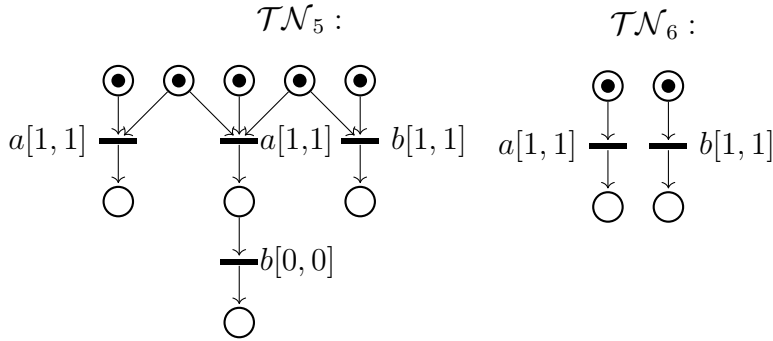


Рис. 3.

Пример 5. ВСП $\mathcal{TN}_2$, $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$, изображенные на рис. 3, i -тестово эквивалентны, тогда как $\mathcal{TN}_1$ и $\mathcal{TN}_2$ не являются таковыми. Легко проверить, что $\mathcal{TN}_2 \text{ after } w = (b,0)(b,0) \text{ MUST}_i W = \{(a, 3.9)\}$. Однако в $\mathcal{FS}_i(\mathcal{TN}_1)$ существует последовательность срабатываний, которая помечена w и после которой невозможно срабатывание перехода, помеченного a , в относительный момент времени 3.9. Таким образом, не выполняется $\mathcal{TN}_1 \text{ after } w \text{ MUST}_i W$. $\square$

Рис. 4. Пример s -, но не $i-i$ -тестово эквивалентных ВСП.

Пример 6. Рассмотрим ВСП $\mathcal{TN}_5$ и $\mathcal{TN}_6$, изображенные на рис. 4. ВСП i - и s -тестово эквивалентны, но не $i-i$ -тестово эквивалентны.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{TN}_6 \text{ after } w = (a,1)(b,0) \text{ MUST}_{i-i} W = \{(\overleftarrow{a}, 1)\}$. Но в $\mathcal{FS}_{i-i}(\mathcal{TN}_5)$ существует обратимая последовательность срабатываний, которая помечена w и в которой невозможна отмена действия $(a,1)$. Таким образом, не выполняется $\mathcal{TN}_5 \text{ after } w \text{ MUST}_{i-i} W$. $\square$

Исследования тестовых эквивалентностей в семантике частичного порядка были впервые проведены Асето и др. в статье [4] в контексте моделей структур событий. При таком подходе в качестве вычислений процесса рассматриваются частично-упорядоченные мультимножества выполняемых действий (ЧУММы), и вместо множеств дальнейших действий могут использоваться непосредственные расширения выполняемых ЧУММов ([17]). Также, в качестве вычислений использовались и ЧУМы выполняемых действий, как в работе [17] при определении одной из версий причинной тестовой эквивалентности.

Далее определяются временные тестовые эквивалентности в семантике частичного порядка для ВСП с использованием ее корректных временных причинных сетей-процессов. Сначала рассмотрим тестовые эквивалентности со слабо-сохраняющей историю семантикой.

Определение 7. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ — ВСП. Для последовательности $w \in (Act \times \mathbb{T})^*$ ($w \in (\overleftarrow{Act} \times \mathbb{T})^*$) и множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов $\mathcal{TN}$ **after** w $\mathbf{MUST}_{wh(i-wh)} \mathbf{TP}$, если для любого $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ такого что $\pi_0 \xrightarrow{w} \pi$ существуют $TP' \in \mathbf{TP}$ и $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}')$ такие, что $\pi \longrightarrow_{p(i-p)} \pi'$ и $\eta(TN') \sim TP'$.

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются $wh-(i-wh)$ -тестово эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{i-wh} \mathcal{TN}'$), если для любой последовательности $w \in (Act \times \mathbb{T})^*$ ($w \in (\overleftarrow{Act} \times \mathbb{T})^*$) и любого множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов выполняется условие: $\mathcal{TN}$ **after** w $\mathbf{MUST}_{wh(i-wh)} \mathbf{TP}' \iff \mathcal{TN}'$ **after** w $\mathbf{MUST}_{wh(i-wh)} \mathbf{TP}'$.

Далее для ВЧУМ $TP \in \mathcal{TP}(Act)$ будем обозначать $\mathbf{TP}_{TP}^p \subseteq \mathcal{TP}(Act)$ множество i -расширений TP , $\mathbf{TP}_{TP}^{i-p} \subseteq \mathcal{TP}(Act)$ множество $i-p$ -расширений TP .

Определение 8. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ — ВСП. Для последовательности ВЧУМов $TP = P_1 \dots P_k \in \mathcal{TP}(Act)^*$ ($TP = \overleftarrow{P}_1 \dots \overleftarrow{P}_k \in (\mathcal{TP}(Act) \cup \overleftarrow{\mathcal{TP}}_e(Act))^*$) и множества $\mathbf{TP} \subseteq \mathcal{TP}(Act)$ ($\mathbf{TP} \subseteq \mathcal{TP}(Act) \cup \overleftarrow{\mathcal{TP}}_e(Act)$) $\mathcal{TN}$ **after** TP $\mathbf{MUST}_{pom(i-pom)} \mathbf{TP}$, если для любого $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ такого что $\pi \xrightarrow{TP} \pi'$ ($\pi_0 \xrightarrow{TP}_{i-p} \pi'$) существуют $TP' \in \mathbf{TP}$ и $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}')$ такие, что $\pi \xrightarrow{TP'} \pi'$ ($\pi \xrightarrow{TP'}_{i-p} \pi'$).

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются $pom-(i-pom)$ -тестово эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{pom(i-pom)} \mathcal{TN}'$), если для любой последовательности ВЧУМов $TP = P_1 \dots P_k \in \mathcal{TP}(Act)^*$ ($TP = \overleftarrow{P}_1 \dots \overleftarrow{P}_k \in (\mathcal{TP}(Act) \cup \overleftarrow{\mathcal{TP}}_e(Act))^*$) и множества $\mathbf{TP} \subseteq \mathcal{TP}(Act)$ ($\mathbf{TP} \subseteq \mathcal{TP}(Act) \cup \overleftarrow{\mathcal{TP}}_e(Act)$) выполняется условие: $\mathcal{TN}$ **after** TP $\mathbf{MUST}_{pom(i-pom)} \mathbf{TP}' \iff \mathcal{TN}'$ **after** TP $\mathbf{MUST}_{pom(i-pom)} \mathbf{TP}'$.

Пример 7. ВСП $\mathcal{TN}_7$ и $\mathcal{TN}_8$, изображенные на рис. 5, *pos*-тестово эквивалентны. Проверим, что они не *i* – *pos*-тестово эквивалентны.

Определим ВЧУМы $TP_1 = (\{x_1, x_2\}, \preceq_1, \lambda_1, \tau_1)$, где $\preceq_1 = \{(x_i, x_i) \mid 1 \leq i \leq 2\} \cup \{(x_1, x_2)\}$, $\lambda_1(x_1) = a$, $\lambda(x_2) = b$, $\tau_1(x_1) = \tau'(x_2) = 1$; $TP_2 = (\{x_1\}, \preceq_2, \lambda_2, \tau_2)$, где $\preceq_2 = \{(x_1, x_1)\}$, $\lambda_2(x_1) = b$, $\tau_2(x_1) = 1$; и ВЧУМ $TP' = (\{x_3\}, \preceq_3, \lambda_3, \tau_3)$, где $\preceq_3 = \{(x_3, x_3)\}$, $\lambda_3(x_3) = c$, $\tau_3(x_3) = 1$. Для единственного временного причинного сети-процесса $\pi_8^1 = (TN_8^1, \varphi_8^1) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_8)$, в котором $E_{TN_8^1}$ состоит из двух событий с пометками a и b , находящихся в причинной зависимости, существует временной причинный сеть-процесс $\pi_8^2 = (TN_8^2, \varphi_8^2) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_8)$, в котором $E_{TN_8^2}$ состоит из события с пометкой a , такой что $\pi_8^2 \xrightarrow{TP_2}_i \pi_8^1$, т.е. $\pi_8^0 \xrightarrow{TP_1}_{i-p} \pi_8^1 \xrightarrow{\overleftarrow{TP_2}}_{i-p} \pi_8^2$. И для π_8^2 существует временной причинный сеть-процесс $\pi_8^3 = (TN_8^3, \varphi_8^3) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_8)$, в котором $E_{TN_8^3}$ состоит из двух событий с пометками a и c , такой, что $\pi_8^2 \xrightarrow{TP'}_i \pi_8^3$. Однако, в случае ВСП $\mathcal{TN}_7$ не верно, что $\mathcal{TN}_7$ **after** $TP_1 \overleftarrow{TP_2}$ **MUST**_{*i-pos*} $\{TP'\}$, а именно для временного сети-процесса, элементы которого отображаются в элементы ВСП $\mathcal{TN}_7$, выделенные на рисунке красным цветом.

Также легко убедиться, что ВСП $\mathcal{TN}_2$ и $\mathcal{TN}_4$ (рис. 3) являются *i* – *wh*-, но не *pos*-тестово эквивалентными.

□

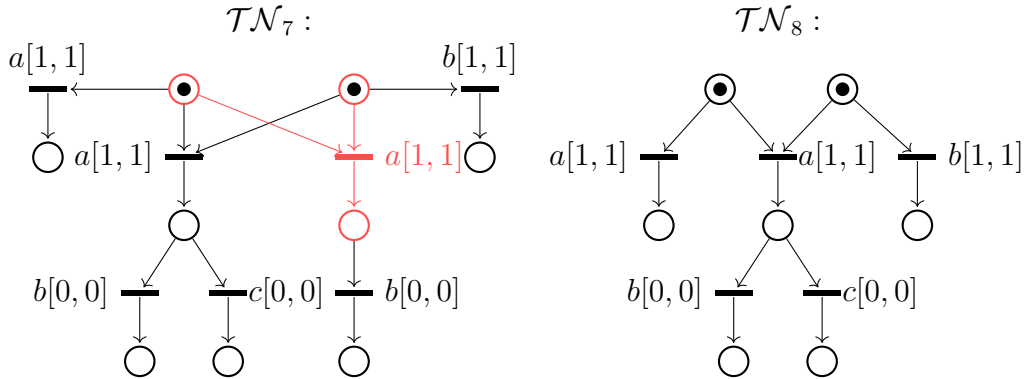


Рис. 5. Пример *i* – *i*-, *pos*-, не *wh*-, не *i* – *pos*-тестово эквивалентных ВСП.

Определение 9. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ – ВСП. Для ВЧУМ TP и множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов такого, что $\mathbf{TP} \subseteq \mathbf{TP}_{TP}^p$, $\mathcal{TN}$ **after** TP **MUST**_{*pos*} $\mathbf{TP}$, если для любого $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и для любого изоморфизма $f : \eta(TN) \rightarrow TP$ существуют $TP' \in \mathbf{TP}$, $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и изоморфизм $f' : \eta(TN') \rightarrow TP'$ такие, что $\pi \rightarrow_p \pi'$ и $f \subseteq f'$.

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются *pos*-тестово эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{pos} \mathcal{TN}'$), если для любого ВЧУМ TP и любого множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов такого, что $\mathbf{TP} \subseteq \mathbf{TP}_{TP}^p$, выполняется условие: $\mathcal{TN}$ **after** TP **MUST**_{*pos*} $\mathbf{TP}' \iff \mathcal{TN}'$ **after** TP **MUST**_{*pos*} $\mathbf{TP}'$.

Введем обозначение для двух изоморфизмов: $f \geq f'$, если $f \subset f'$ или $f' \subset f$.

Определение 10. Пусть $\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ — ВСП. Для последовательности ВЧУМов $TP = P_1 \dots P_k \in \mathcal{TP}_{i-p}^{\square}(Act)$ и множества ВЧУМов $\mathbf{TP}$ такого, что $\mathbf{TP} \subseteq \mathbf{TP}_{P_k}^{i-p}$, $\mathcal{TN}$ **after** TP **MUST** _{$i-pos$} $\mathbf{TP}$, если для любого $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$, такого что $\pi_0 \xrightarrow{TP}_{i-p} \pi'$, и для любого изоморфизма $f : \eta(TN) \rightarrow P_k$ существуют $TP' \in \mathbf{TP}$, $\pi' = (TN', \varphi') \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN})$ и изоморфизм $f' : \eta(TN') \rightarrow TP'$ такие, что $\pi \rightarrow_{i-p} \pi'$ и $f \geq f'$.

$\mathcal{TN}$ и $\mathcal{TN}'$ называются i — pos -тестово эквивалентными (обозначается $\mathcal{TN} \sim_{i-pos} \mathcal{TN}'$), если для любой последовательности ВЧУМов $TP = P_1 \dots P_k \in \mathcal{TP}_{i-p}^{\square}(Act)$ и любого множества $\mathbf{TP}$ ВЧУМов такого, что $\mathbf{TP} \subseteq \mathbf{TP}_{P_k}^{i-p}$, выполняется условие: $\mathcal{TN}$ **after** TP **MUST** _{$i-pos$} $\mathbf{TP} \iff \mathcal{TN}'$ **after** TP **MUST** _{$i-pos$} $\mathbf{TP}$.

Пример 8. Рассмотрим ВСП $\mathcal{TN}_2$, $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$, изображенные на рис. 3. Легко проверить, что $\mathcal{TN}_2$ и $\mathcal{TN}_3$ pos -тестово эквивалентны, тогда как $\mathcal{TN}_3$ и $\mathcal{TN}_4$ не являются таковыми. Убедимся в последнем. Определим ВЧУМ $TP = (\{x_1, x_2\}, \preceq, \lambda, \tau)$, где $\preceq = \{(x_i, x_i) \mid 1 \leq i \leq 2\}$, $\lambda(x_1) = \lambda(x_2) = b$, $\tau(x_1) = \tau'(x_2) = 0$; и ВЧУМ $TP' = (\{x_1, x_2, x_3\}, \preceq', \lambda', \tau')$, где $\preceq' = \{(x_i, x_i) \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{(x_2, x_3)\}$, $\lambda'(x_1) = \lambda'(x_2) = b$, $\lambda'(x_3) = a$, $\tau'(x_1) = \tau'(x_2) = 0$ и $\tau'(x_3) = 3.9$. Для любого временного причинного сети-процесса $\pi_3 = (TN_3, \varphi_3) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_3)$, в котором E_{TN_3} состоит из двух параллельных событий с пометками b и временными значениями, равными 0, и для любого изоморфизма $f_3 : \eta(TN_3) \rightarrow TP$ можно найти временной причинный сеть-процесс $\pi'_3 = (TN'_3, \varphi'_3) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_3)$, в котором $E_{TN'_3}$ состоит из двух параллельных событий с пометками b и временными значениями 0 и третьего события с пометкой a и временным значением 3.9, находящегося в отношении причинной зависимости с одним из b , и изоморфизм $f'_3 : \eta(TN'_3) \rightarrow TP'$ такие, что $\pi_3 \rightarrow_p \pi'_3$ и $f_3 \subset f'_3$. Однако, это не так в случае ВСП $\mathcal{TN}_4$. Таким образом, $\mathcal{TN}_3$ **after** TP **MUST** _{pos} $\{TP'\}$, но не верно, что $\mathcal{TN}_4$ **after** TP **MUST** _{pos} $\{TP'\}$.

□

6. Взаимосвязи тестовых эквивалентностей

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь между совпадением обратимых языков ВЧУМов для ВСП с наличием между ними временных тестовых эквивалентностей с интерливинговой и шаговой обратимостью.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{TN}_1$ и $\mathcal{TN}_2$ — ВСП, $\star, * \in \{i, s\}$. Тогда

$$\mathcal{TN}_1 \sim_{\star-*} \mathcal{TN}_2 \Rightarrow \mathcal{L}_{\star-*}(\mathcal{TN}_1) = \mathcal{L}_{\star-*}(\mathcal{TN}_2),$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{TN}_1 \sim_{\text{pos}} \mathcal{TN}_2 &\Rightarrow \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}_1) = \mathcal{TPos}(\mathcal{TN}_2), \\
\mathcal{TN}_1 \sim_{i\text{-pom}} \mathcal{TN}_2 &\Rightarrow \mathcal{TPom}_{i\text{-p}}(\mathcal{TN}_1) = \mathcal{TPom}_{i\text{-p}}(\mathcal{TN}_2), \\
\mathcal{TN}_1 \sim_{i\text{-pos}} \mathcal{TN}_2 &\Rightarrow \mathcal{TPos}_{i\text{-p}}(\mathcal{TN}_1) = \mathcal{TPos}_{i\text{-p}}(\mathcal{TN}_2).
\end{aligned}$$

Далее представлена иерархия введенных временных тестовых эквивалентностей в различных семантиках без обратимости и с обратимостью.

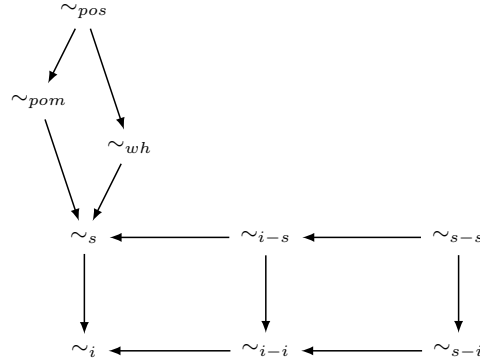


Рис. 6.

Теорема 1. Пусть $\star, * \in \{i, s, \text{pos}, \text{pom}, \text{wh}\}$ и $\dagger, \ddagger \in \{i, s, \circ\}$, где $\circ$ означает "нуто".

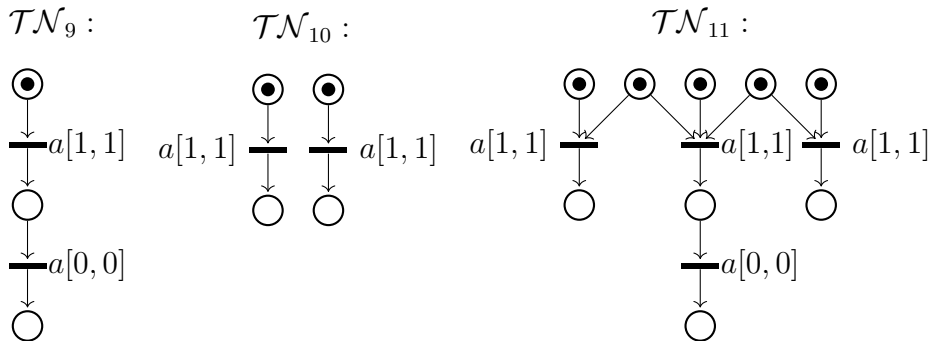
Если $\sim_{\dagger-*}$ и $\sim_{\ddagger-\star}$ представлены на рис. 6, то для ВСП $\mathcal{TN}_1$ and $\mathcal{TN}_2$ выполняется:

$\mathcal{TN}_1 \sim_{\dagger-*} \mathcal{TN}_2 \Rightarrow \mathcal{TN}_1 \sim_{\ddagger-\star} \mathcal{TN}_2 \iff$ существует путь из $\sim_{\dagger-*}$ в $\sim_{\ddagger-\star}$ на рис. 6.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Очевидным образом следует из определений временных тестовых эквивалентностей.

($\Rightarrow$) Для доказательства отсутствия на рис. 6 других прямых стрелок и стрелок в обратном направлении рассмотрим следующие контрпримеры.

1) ВСП $\mathcal{TN}_5$ и $\mathcal{TN}_6$, рассмотренные ранее в примере 6 s -тестово эквивалентны, и легко проверить, что данные ВСП ни $i-i$ -, ни pom -, ни pos -тестово эквивалентны.

Рис. 7. Примеры $i-i$ -тестово эквивалентных ВСП.

2) ВСП $\mathcal{TN}_9$ и $\mathcal{TN}_{10}$, изображенные на рис. 7, $i-i$ -тестово эквивалентны, но ни s -, ни $s-i$ -тестово эквивалентны. Нетрудно проверить, что $\mathcal{TN}_{10} \text{ after } w = (a, 1)(a, 0) \text{ MUST}_{s-i}$

$W = \{(\overleftarrow{[a : 2]}, 1)\}$. Однако в $\mathcal{TN}_9$ после последовательности срабатываний, помеченной w , невозможно срабатывание обратного шага, помеченного $(\overleftarrow{[a : 2]}, 1)$. Таким образом, не выполняется $\mathcal{TN}_9 \text{ after } w \text{ MUST}_{s-i} W$.

3) ВСП $\mathcal{TN}_{10}$ и $\mathcal{TN}_{11}$, изображенные на рис. 7, i – s -тестово эквивалентны. Но данные ВСП не $s-i$ -тестово эквивалентны, так как ВСП $\mathcal{TN}_{11}$ не проходит тест, описанный выше в п. 2.

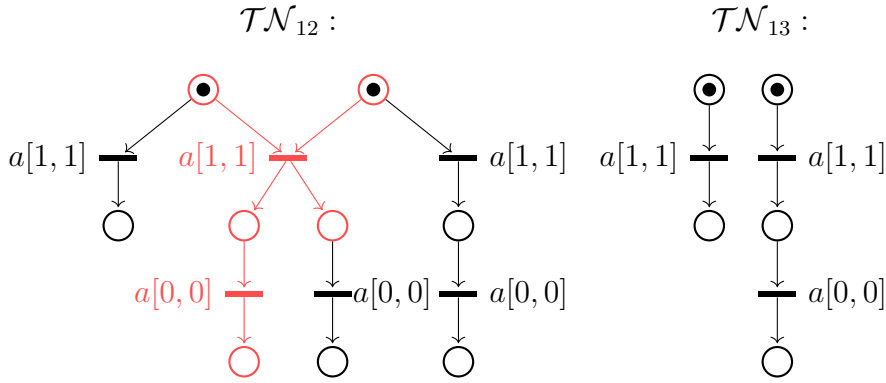


Рис. 8. Пример $s-s$ -, не wh -, не rom -тестово эквивалентных ВСП.

4) ВСП $\mathcal{TN}_{12}$ и $\mathcal{TN}_{13}$, изображенные на рис. 8, $s-s$ -тестово эквивалентны, но ни rom -, ни wh -тестово эквивалентны. Проверим последнее.

Определим последовательность $w = (a, 1)(a, 0) \in (Act \times \mathbb{T})^*$ и ВЧУМ $TP' = (\{x_1, x_2, x_3\}, \preceq', \lambda', \tau')$, где $\preceq' = \{(x_i, x_i) \mid 1 \leq i \leq 3\} \cup \{(x_1, x_2)\}$, $\lambda'(x_1) = \lambda'(x_2) = \lambda'(x_3) = a$, $\tau'(x_1) = \tau'(x_2) = \tau'(x_3) = 1$. Для любого временного причинного сети-процесса $\pi_{13} = (TN_{13}, \varphi_{13}) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_{13})$, в котором $E_{TN_{13}}$ состоит из двух событий с пометками a и временными значениями, равными 1, т.е. $\pi_{13}^0 \xrightarrow{w} \pi_{13}$, существует его i -расширение, единственный временной причинный сеть-процесс $\pi'_{13} = (TN'_{13}, \varphi'_{13}) \in \mathcal{CP}(\mathcal{TN}_{13})$, в котором $E_{TN'_{13}}$ состоит из трех событий: двух параллельных событий с пометками a и третьего события с пометкой a , находящегося в отношении причинной зависимости с одним из a , и временными значениями 1, т.е. $\pi_{13} \rightarrow_i \pi'_{13}$, $\eta(TN'_{13}) \simeq TP'$ и $\mathcal{TN}_{13} \text{ after } w \text{ MUST}_{wh} \{TP'\}$. В случае ВСП $\mathcal{TN}_{12}$, например, для временного сети-процесса, элементы которого отображаются в элементы ВСП $\mathcal{TN}_{12}$, выделенные на рисунке красным цветом, не существует необходимого i -расширения.

5) ВСП $\mathcal{TN}_7$ и $\mathcal{TN}_8$, изображенные на рис. 5 и рассмотренные ранее в примере 7, $i-i$ - и rom -тестово эквивалентны, но ни pos -, ни wh -тестово эквивалентны. Убедимся в последнем.

Определим последовательность $w = (a, 1) \in (Act \times \mathbb{T})^*$ и ВЧУМы $TP_1 = (\{x_1, x_2\}, \preceq_1,$

λ_1, τ_1), где $\preceq_1 = \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_1, x_2)\}$, $\lambda_1(x_1) = a$, $\lambda(x_2) = c$, $\tau_1(x_1) = \tau_1(x_2) = 1$; $TP_2 = (\{x'_1, x'_2\}, \preceq_2, \lambda_2, \tau_2)$, где $\preceq_2 = \{(x'_1, x'_1), (x'_2, x'_2)\}$, $\lambda_2(x'_1) = a$, $\lambda_2(x'_2) = b$, $\tau_2(x'_1) = \tau_2(x'_2) = 1$.

Легко видеть, что $\mathcal{TN}_8 \text{ after } w \text{ MUST}_{wh} \{TP_1, TP_2\}$. Однако, это не так для ВСП $\mathcal{TN}_7$, так как, например, для временного сети-процесса, элементы которого отображаются в элементы ВСП $\mathcal{TN}_7$, выделенные на рисунке красным цветом, не существует i -расширения, которому бы соответствовало ВЧУМ, изоморфное TP_1 или TP_2 .

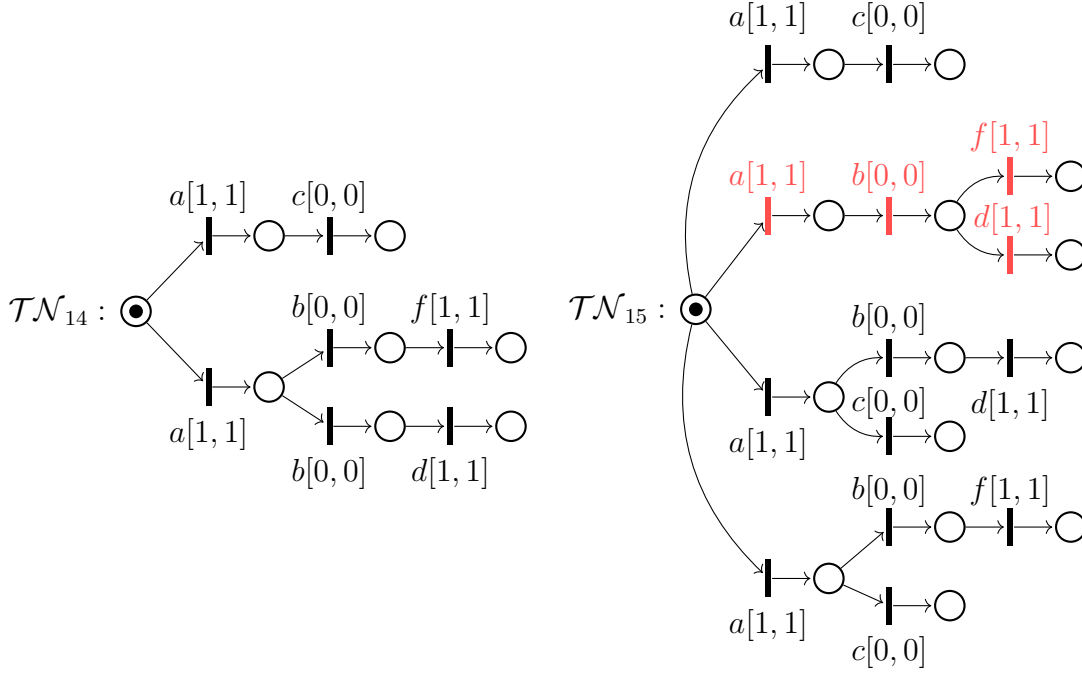
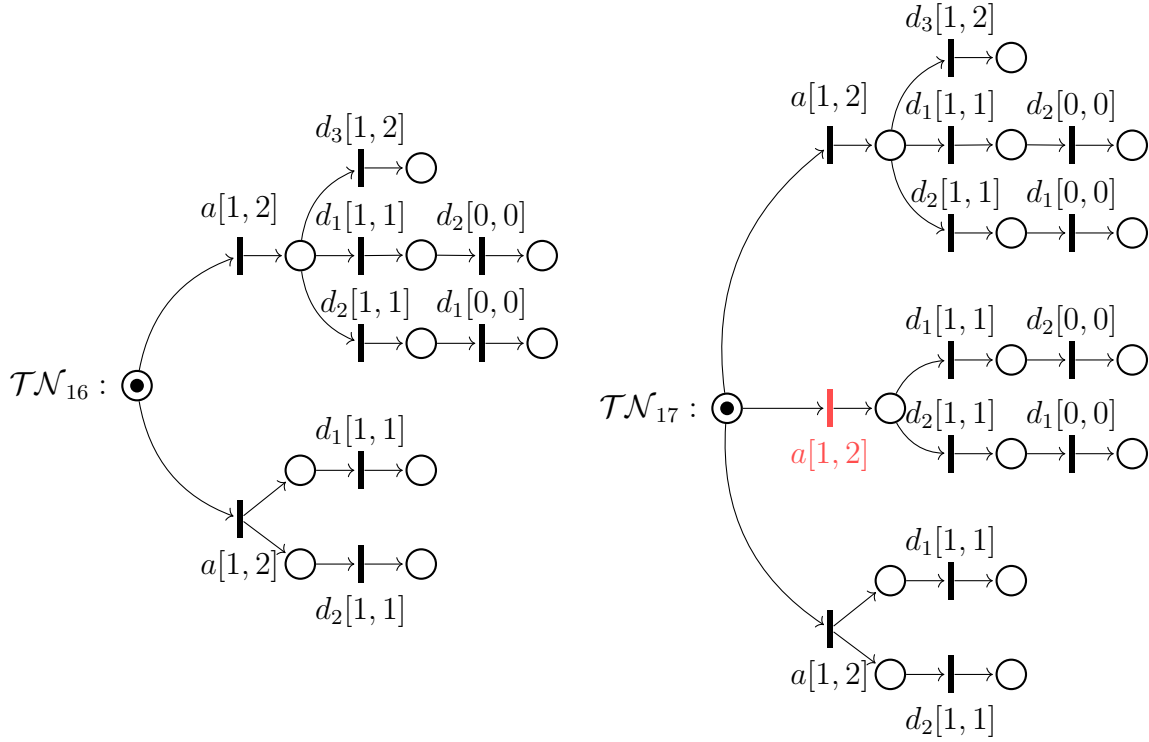


Рис. 9. Пример pos -, не i – i -тестово эквивалентных ВСП.

6) ВСП $\mathcal{TN}_{14}$ и $\mathcal{TN}_{15}$, изображенные на рис. 9, pos -тестово эквивалентны, но не i – i -тестово эквивалентны. $\mathcal{TN}_{14} \text{ after } w = (a, 1)(b, 0)(d, 1)(\overleftarrow{d}, 1)(f, 1) \text{ MUST}_{i-i} W = \{(e, 1)\}$, так как в ВСП $\mathcal{TN}_{14}$ не существует обратимой i – i -последовательности срабатываний, которая помечена w . Однако в ВСП $\mathcal{TN}_{15}$ существует такая обратимая i – i -последовательность срабатываний, входящие в нее переходы выделены на рисунке красным цветом, и для неё невозможно расширение посредством срабатывания шага, помеченного $(e, 1)$. Таким образом, не выполняется $\mathcal{TN}_{15} \text{ after } w \text{ MUST}_{i-i} W$.

7) ВСП $\mathcal{TN}_{16}$ и $\mathcal{TN}_{17}$, изображенные на рис. 10, s – i -тестово эквивалентны, но не s -тестово эквивалентны.

Нетрудно проверить, что $\mathcal{TN}_{16} \text{ after } w = (a, 1) \text{ MUST}_s W = \{([d_1, d_2], 1); (d_3, 1)\}$. Но в $\mathcal{TN}_{17}$ после последовательности срабатываний, помеченной w и соответствующей средней части ВСП на рисунке (переход выделен красным цветом), невозможны срабатывания ни

Рис. 10. Пример $s-i$, не s -тестово эквивалентных ВСП

шага, помеченного $([d_1, d_2], 1)$, ни шага $(d_3, 1)$. Таким образом, не выполняется $\mathcal{T}\mathcal{N}_{17}$ after w **MUST_s** W . $\square$

Вопросы о взаимосвязях тестовых эквивалентностей с обратимостью в частично-упорядоченной семантике в основном пока остаются открытыми. Как следствие Теоремы 1 и примера 7 на рис. 11 представлена иерархия рассмотренных в статье временных тестовых эквивалентностей с обратимостью. Стрелки с белыми наконечниками обозначают остающиеся открытыми вопросы о взаимосвязях.

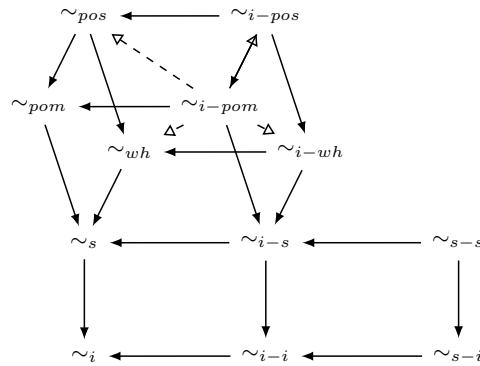


Рис. 11.

7. Заключение

В данной статье была сделана попытка расширить тестовые эквивалентности введением тестов с возможностью отмены выполненных действий. В контексте непрерывно-временных сетей Петри были введены понятия тестовых эквивалентностей в интерливинговой, шаговой и частично-упорядоченной семантиках с обратимостью в интерливинговой и шаговой семантиках. Для введения отмены действий применялся метод причинной обратимости, который хорошо поддерживается использованной для представления вычислений ВСП частично-упорядоченной семантикой причинных сетей-процессов. Были исследованы взаимосвязи между изученными ранее ([1, 10]) и введенными тестовыми эквивалентностями. Установлено, что тестовая эквивалентность в частично-упорядоченной семантике слабее интерливинговой тестовой эквивалентности с обратимостью в интерливинговой семантике. Также в полученной иерархии показано, что, в отличие от бисимуляций с обратимостью ([29]), интерливинговая тестовая эквивалентность с шаговой обратимостью не сильнее шаговой тестовой эквивалентности с интерливинговой обратимостью. Заметим, что и для вариантов эквивалентностей с "расширенным будущим", тестовые эквивалентности для случаев с "единичным будущим" и "расширенным будущим" различаются, в отличие от бисимуляционной эквивалентности, для которых установлено совпадение ([10]). Также остался открытым вопрос о взаимоотношении некоторых тестовых эквивалентностей в частично-упорядоченной семантике. Поэтому в дальнейшем планируется продолжить изучение тестовых эквивалентностей с шаговой обратимостью, а также исследовать тестовые эквивалентности с обратимостью в частично-упорядоченной семантике.

Список литературы

1. Боженкова Е.Н., Вирбицкайте И.Б. Тестовые эквивалентности временных Сетей Петри // Программирование. 2020. №4. С. 3-13.
2. Вирбицкайте И.Б., Боровлёв В.А., Попова-Цейгманн Л. Истинно-параллельная и недетерминированная семантика временных сетей Петри // Программирование. 2016. №4. С. 4-16.
3. Грибовская Н.С., Вирбицкайте И.Б. Семантика систем переходов структур событий с отменяемыми событиями при сохранении причинно-следственной зависимости // Системная информатика. 2024. №24. С.59-90.
4. Aceto L., De Nicola R., Fantechi A. Testing equivalences for event structures // Lect. Notes in Computer Sci. 1987. Vol. 280. P. 1-20.

5. Andreeva M., Bozhenkova E., Virbitskaite I. Analysis of timed concurrent models based on testing equivalence// *Fundamenta Informaticae*. 2000. Vol. 43. P. 1–20.
6. Aura T., Lilius J. A causal semantics for time Petri nets// *Theor. Computer Sci.* 2000. Vol. 243, №1–2. P. 409–447.
7. Barylska, K., Koutny, M., Mikulski, L., Piatkowski, M. Reversible computation vs. reversibility in Petri nets// *Sci. Comput. Program.* 2018. Vol. 151. P.48-60.
8. Berard B., Cassez F., Haddad S., Lime D., Roux O.H. Comparison of the expressiveness of timed automata and time Petri nets// *Lect. Notes in Computer Sci.* 2005. Vol. 3829. P. 211–225.
9. Bihler E., Vogler W. Timed Petri Nets: Efficiency of Asynchronous Systems// *Lect. Notes in Computer Sci.* 2004. Vol. 3185. P. 25–58.
10. Bozhenkova E., Virbitskaite I. Extended Future in Testing Semantics for Time Petri Nets// *Concurrency, Specification and Programming — Revised Selected Papers from the 29th International Workshop on Concurrency, Specification and Programming (CS&P’21)*, Berlin, Germany, in series: *Studies in Computational Intelligence*. Springer. 2023. Vol. 1091. P. 65-89.
11. Cleaveland R., Hennessy M. Testing equivalence as a bisimulation equivalence// *Lect. Notes in Computer Sci.* 1989. Vol. 407. P. 11–23.
12. Cleaveland R., Zwarico A.E. A theory of testing for real-time// *Proc. 6th IEEE Symp. on Logic in Comput. Sci. (LICS’91)*. Amsterdam, The Netherlands, 1991. P. 110–119.
13. Corradini F., Vogler W., Jenner L. Comparing the Worst-Case Efficiency of Asynchronous Systems with PAFAS// *Acta Informatica*. 2002. Vol. 38. №11–12. P. 735–792.
14. Danos, V, Krivine, J.: Reversible communicating systems// *In: Proceedings of CONCUR’04. Lect. Notes in Computer Sci.* 2004. Vol. 3170. P. 292-307.
15. De Nicola R., Hennessy M. Testing equivalence for processes// *Theor. Comput. Sci.* 1984. Vol. 34. P. 83–133.
16. R. De Nicola, U. Montanari, and F. Vaandrager: Back and forth bisimulations// *Proc. CONCUR ’90, Theories of Concurrency: Unification and Extension. Lect. Notes in Comp. Sci.* 1990. Vol. 458. P. 152–165.
17. Goltz U., Wehrheim H. Causal testing// *Lect. Notes in Computer Sci.* 1996. Vol. 1113. P. 394–406.
18. M. Hennessy, R.Milner: Algebraic laws for nondeterminism and concurrency// *JACM*. 1985. Vol. 32. №1. P. 137–161.
19. Hennessy M., Regan T. A process algebra for timed systems// *Inform. and Comput.* 1995. Vol. 117. P. 221–239.
20. Hoogers P.W., Kleijn H.C.M., Thiagarajan P.S. An event structure semantics for general Petri nets// *Theor. Computer Sci.* 1996. Vol. 153. №1–2. P. 129–170.
21. Lanese, I., Lienhardt, M., Mezzina, C.A., Schmitt, A., Stefani, J.-B. Concurrent flexible reversibility// *In: Felleisen, M., Gardner, P. (eds.) ESOP 2013. Lect. Notes in Computer Sci.* Heidelberg:Springer, 2013. Vol. 7792. P. 370–390. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-37036-6_21.
22. Lanese, I., Palacios, A., Vidal, G. Causal-consistent replay debugging for message passing programs// *In: Perez, J.A., Yoshida, N. (eds.) FORTE 2019. Lect. Notes in Computer Sci.* Springer,

- Cham, 2019. Vol. 11535, P. 167–184. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-21759-4_10.
23. Llana L., de Frutos D. Denotational semantics for timed testing// *Lect. Notes in Computer Sci.* 1997. Vol. 1233. P. 368–382.
 24. Melgratti, H.C., Mezzina, C.A., Phillips, I., Pinna, G.M., Ulidowski, I. Reversible occurrence nets and causal reversible prime event structures// In I. Lanese and M. Rawski, eds., *Reversible Computation - 12th International Conference, RC 2020. Lect. Notes in Computer Sci.* Springer, 2020. Vol. 12227. P. 35–53.
 25. Melgratti, H.C., Mezzina, C.A., Pinna, G.M. A Reversible Perspective on Petri Nets and Event Structures// *Proc. ACM Transactions on Computational Logic*, August 2024. Vol. 25, №4. P. 1–38. URL: <https://doi.org/10.1145/3686154>.
 26. Murphy D. Time and duration in noninterleaving concurrency// *Fundamenta Informaticae*. 1993. Vol. 19. P. 403–416.
 27. M. Nielsen, C. Clausen. Bisimulation for Models in Concurrency// In: *Proc. of 5th Int. Conf. on Concurrency Theory, CONCUR'94. Lect. Notes in Computer Sci.* Springer-Verlag. 1994. Vol. 836. P. 385–400.
 28. Nielsen, M., Rozenberg, G., Thiagarajan, P.S. Behavioural notions for elementary net systems // *Distributed Computing*. 1990. Vol. 4. №1. P. 45–57.
 29. Phillips, I.C.C., Ulidowski, I. A hierarchy of reverse bisimulations on stable configuration structures// *Math. Struct. Comput. Sci.* 2012. Vol.22. P. 333–372.
 30. Phillips, I.C.C., Ulidowski, I. Event identifier logic// *Math. Struct. Comput. Sci.* 24, 2014, P. 1–51.
 31. Phillips, I.C.C., Ulidowski, I. Reversibility and asymmetric conflict in event structures// *Logic and Algebraic Methods in Programming*. 2015. Vol. 84, №6. P. 781–805.
 32. Pomello, L., Rozenberg, G., Simone C. A Survey of Equivalence Notions for Net Based Systems// *Lect. Notes in Computer Sci.* 1992. Vol. 609. P. 410–472.
 33. Valero, Vol., de Frutos, D., Cuartero, F. Timed processes of timed Petri nets// *Lect. Notes in Computer Sci.* 1995. Vol. 935. P. 490–509.
 34. van Glabbeek R.J. The linear time – branching time spectrum I: the semantics of concrete, sequential processes// In: Bergstra J.A., Ponse A., and Smolka S.A. (eds.), *Handbook of Process Algebra* Elsevier. 2001. P. 3–99.
 35. van Glabbeek R.J., Goltz U., Schicke J.-W. On causal semantics of Petri nets // *Lect. Notes in Computer Sci.* 2011. Vol. 6901. P. 43–59.
 36. Vassor, M., Stefani, J.-B. Checkpoint/Rollback vs causally-consistent reversibility// In: Kari, J., Ulidowski, I. (eds.) *RC 2018. Lect. Notes in Computer Sci.* Springer, Cham (2018). Vol. 11106. P. 286–303. URL:https://doi.org/10.1007/978-3-319-99498-7_20.
 37. Virbitskaite I., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets// *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 149. №4. P. 401–418.